Нить через блок и стержень

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Через блок перекинули невесомую и нерастяжимую нить. К одному концу нити прикрепили небольшое тело массой m, ко второму концу — стержень массой M длиной L. Найти силу натяжения стержня в сечении, находящемся на расстоянии $l = L/3$ от его конца (см. рисунок). Как эта сила зависит от того, какая из масс больше, m или M?

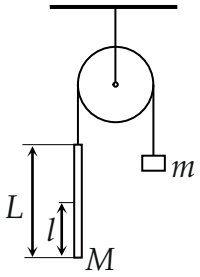


Рисунок условия: блок на подвесе, нить с грузом m и стержнем M; l отсчитывается от нижнего конца стержня.

▲ **Решение. Что происходит.** Нить нерастяжима и перекинута через блок, поэтому груз и стержень движутся с одинаковыми по модулю ускорениями, но в противоположные стороны: большая масса идёт вниз, меньшая — вверх. Сначала найдём ускорение стержня из второго закона Ньютона для груза и стержня. Потом мысленно отрежем нижний кусок стержня длиной l: на него действуют только его вес и натяжение в сечении со стороны остального стержня, а ускорение у него то же, что у всего стержня. Второй закон Ньютона для куска даст искомую силу. Главная идея — записывать проекцию ускорения со знаком: тогда оба случая ($m > M$ и $m < M$) получаются одной формулой.

Обозначения. Ось y направим вертикально вверх. a_y — проекция ускорения стержня на эту ось (знак заранее неизвестен); у груза проекция равна $-a_y$ (нить нерастяжима). $T_{\text{н}}$ — натяжение нити: блок и нить невесомы и блок идеальный, поэтому натяжение одинаково по обе стороны блока. $M_1 = M/3$ — масса нижнего куска (стержень однородный,

масса пропорциональна длине), T — искомое натяжение в сечении, то есть сила, с которой остальной стержень тянет кусок вверх.

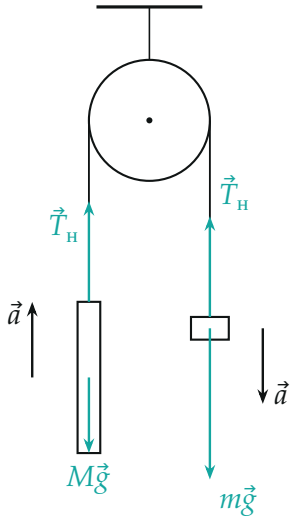
1. Ускорение системы. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось y для стержня и для груза (на каждый действуют сила тяжести и натяжение нити):

$$Ma_y = T_н - Mg, \qquad m\,(-a_y) = T_н - mg.$$

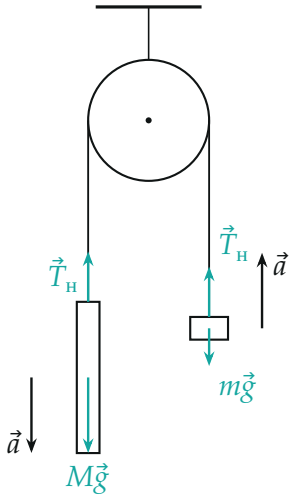
Вычтем второе уравнение из первого и выразим ускорение:

$$(M+m)\,a_y = (m-M)\,g \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{m-M}{m+M}\,g.$$

При $m > M$ имеем $a_y > 0$: стержень разгоняется вверх; при $m < M$ имеем $a_y < 0$: вниз. Модуль ускорения всегда меньше g.



$m > M$ ($m = 2M$)



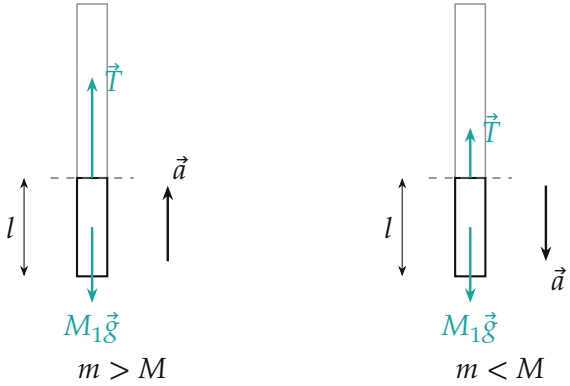
$m < M$ ($m = M/2$)

Силы на стержень и груз (длины стрелок сил — в одном масштабе на каждой панели: $Mg = 1$ см) и ускорения ($a = g/3$, 3 см на g). Слева $m = 2M$: груз опускается, стержень поднимается; справа $m = M/2$: наоборот. Натяжение нити $T_н = \dfrac{2mM}{m+M}\,g$ вдоль нити.

Из первого уравнения находим и натяжение нити:

$$T_{\text{н}} = M\,(g + a_y) = \frac{2mM}{m+M}\,g.$$

2. Нижний кусок стержня. Отрежем кусок длиной $l = L/3$ от нижнего конца. Все точки стержня движутся поступательно, поэтому у куска то же ускорение a_y. Сверху на него тянет натяжение T (оно направлено вверх, вдоль стержня), снизу ничего не действует, и ещё действует его вес $M_1\vec{g}$.



Нижний кусок длиной l (штрих — место сечения; выше — остальной стержень, серым): силы на кусок и его ускорение, $M_1 g = \frac{1}{3}Mg$ в обоих случаях принято за 1 см; $a = g/3$ — 1 см.

Запишем второй закон Ньютона для куска в проекции на ось y:

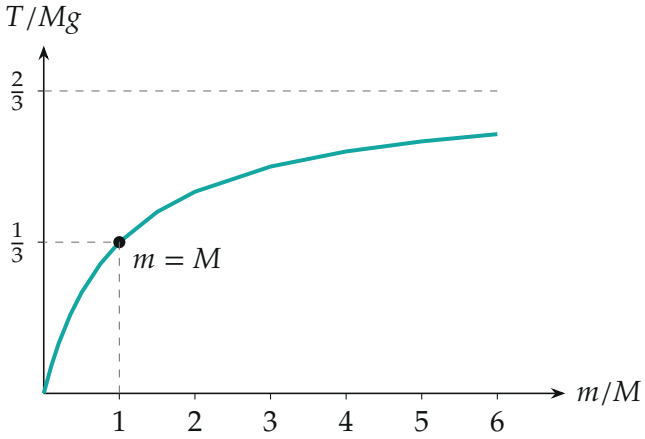
$$M_1 a_y = T - M_1 g \quad \Rightarrow \quad T = M_1\,(g + a_y) = \frac{M}{3}\cdot\frac{2m}{m+M}\,g.$$

Подставляя a_y из пункта 1, получаем

$$T = \frac{2mM}{3\,(m+M)}\,g.$$

3. Зависит ли ответ от того, какая масса больше. Нет. Обратите внимание: при $m > M$ ускорение стержня направлено вверх, и сила T

должна не только держать вес куска, но и разгонять его вверх, поэтому $T > M_1 g$. При $m < M$ ускорение направлено вниз и по модулю меньше g: кусок «не падает свободно», и $T = M_1(g - |a|) > 0$. В проекциях со знаком это одно и то же выражение $T = M_1(g + a_y)$, поэтому формула в обоих случаях получается одинаковой; от соотношения m и M зависит только знак a_y, но не вид ответа.

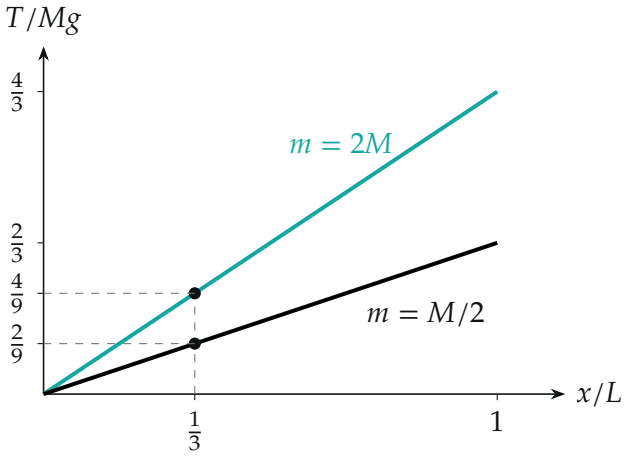


Сила T в сечении $l = L/3$ как функция отношения масс m/M (точки вычислены): плавная кривая без излома при $m = M$ (точка), где ускорение стержня меняет знак. При $m/M \to \infty$ сила стремится к $\frac{2}{3}Mg$.

Второй способ — натяжение вдоль стержня. Для куска длиной x тот же расчёт даёт $T(x) = \dfrac{x}{L} M(g + a_y) = \dfrac{x}{L} T_\text{н}$: натяжение растёт линейно от нуля на нижнем конце до $T_\text{н}$ на верхнем, а в сечении $x = L/3$ равно трети $T_\text{н}$:

$$T = \frac{1}{3} T_\text{н} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2mM}{m + M} g.$$

Результат совпал с пунктом 2.



Натяжение вдоль стержня $T(x)$, x отсчитывается от нижнего конца; в сечении $x = L/3$ натяжение равно трети натяжения нити. Бирюзовая — $m = 2M$ ($T_н = \frac{4}{3}Mg$), чёрная — $m = M/2$ ($T_н = \frac{2}{3}Mg$).

Проверка. Размерность: $\dfrac{mM}{m+M}\,g$ — сила (массу на ускорение). Предел $m \to 0$: нить свободна, стержень падает с ускорением g, внутреннее натяжение исчезает, и формула даёт $T \to 0$. Предел $m \to \infty$: стержень разгоняется вверх с ускорением g, эффективное ускорение $2g$, и $T = M_1 \cdot 2g = \frac{2}{3}Mg$ — то же, что даёт формула. Случай $m = M$: покой, $T = M_1 g = \frac{1}{3}Mg$; формула: $\dfrac{2M^2 g}{3 \cdot 2M} = \frac{1}{3}Mg$.

Смысл такой: стержень разгоняется или тормозится нитью целиком, а внутри него каждая часть удерживает всё, что ниже неё, поэтому натяжение растёт линейно от свободного конца.

Ответ. $T = \dfrac{2mM}{3(m+M)}\,g$; сила натяжения не зависит от того, какая из масс больше (ускорение стержня меняет знак, а формула остаётся прежней).