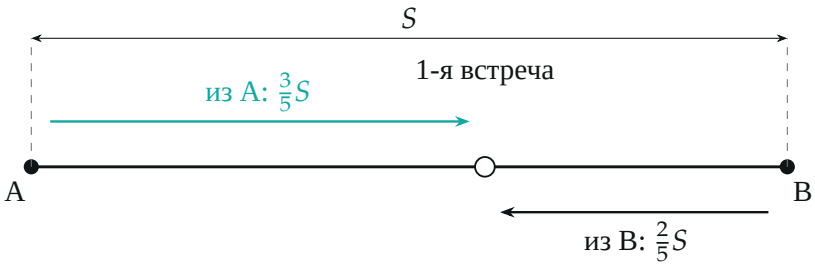
Вторая встреча машин

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Из двух городов A и B, расстояние между которыми S, одновременно навстречу друг другу выехали две машины. Машины встретились на расстоянии $2S/5$ от города B и продолжили движение в прежних направлениях. Доехав до городов B и A соответственно, машины развернулись и поехали назад. На каком расстоянии от города A произойдёт вторая встреча машин? Считать, что машины разворачиваются мгновенно.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): дорога от города A до города B; первая встреча на расстоянии $2S/5$ от B. Стрелки — пути, пройденные машинами до первой встречи (в масштабе).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Скорости машин постоянны, поэтому пройденный путь каждой растёт пропорционально времени, а сумма путей двух машин — со скоростью $v_1 + v_2$. До первой встречи вместе они проезжают расстояние S. От первой встречи до второй вместе проезжают ещё $2S$: сначала S до чужих городов (по $3S/5$ и $2S/5$), потом ещё S после разворотов навстречу друг другу. Главная идея: на всю дорогу между встречами уходит вдвое больше времени, чем до первой встречи, поэтому каждая машина проезжает вдвое больший путь.

Обозначения. Ось x направим от города A к городу B, начало — в A. v_1 — скорость машины из A, v_2 — из B, t_1 — время до первой встречи, τ — время между встречами. Развороты мгновенные, скорости по модулю не меняются.

1. До первой встречи. Машина из А проехала $S - \frac{2}{5}S = \frac{3}{5}S$, машина из В — $\frac{2}{5}S$, за одно и то же время t_1:

$$v_1 t_1 = \frac{3}{5}S, \qquad v_2 t_1 = \frac{2}{5}S, \qquad (v_1 + v_2)\, t_1 = S.$$

Отсюда $v_1 : v_2 = 3 : 2$ — машина из А быстрее в полтора раза.

2. Время между встречами. Разобьём путь от первой встречи до второй на два участка (рисунок ниже): 1) каждая машина доезжает до чужого города (машина из А — до В, машина из В — до А): вместе они проезжают $\frac{2}{5}S + \frac{3}{5}S = S$; 2) после разворота машины едут навстречу друг другу и встречаются: вместе проезжают ещё S. Всего за время τ суммарный путь равен $2S$:

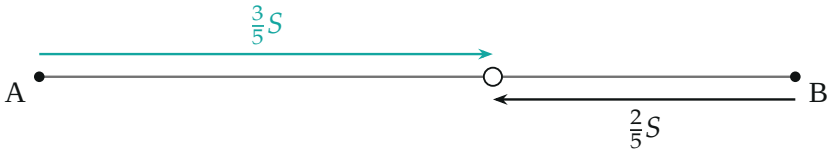
$$(v_1 + v_2)\, \tau = 2S.$$

Разделим на уравнение $(v_1 + v_2)\, t_1 = S$:

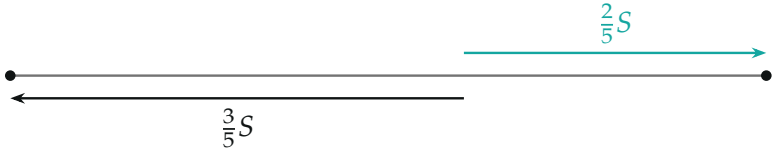
$$\frac{\tau}{t_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \tau = 2t_1.$$

Обратите внимание: вдвое больше именно время между встречами; от начала движения до второй встречи проходит $3t_1$.

1. до первой встречи (вместе S)



2. до чужих городов (вместе S)



3. после разворотов (вместе S)



Три участка движения в одном масштабе (бирюзовые — машина из A, чёрные — из B; кружки — встречи). Сумма двух путей на каждом участке равна S; на втором участке машины едут уже в обратную сторону.

3. Пути между встречами. Скорости постоянны, поэтому за время $\tau = 2t_1$ каждая машина проезжает вдвое больше, чем за t_1:

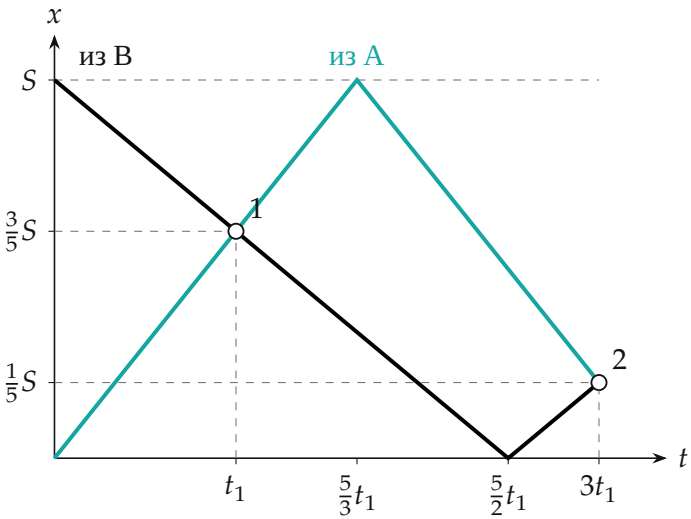
$$v_1\tau = 2\cdot\frac{3}{5}S = \frac{6}{5}S, \qquad v_2\tau = 2\cdot\frac{2}{5}S = \frac{4}{5}S.$$

4. Положение второй встречи. Машина из A от первой встречи ($x = \frac{3}{5}S$) доезжает до B: это $\frac{2}{5}S$. Остаток пути после разворота равен $\frac{6}{5}S - \frac{2}{5}S = \frac{4}{5}S$, и она едет к A. Значит, её координата в момент встречи

$$x = S - \frac{4}{5}S = \frac{1}{5}S.$$

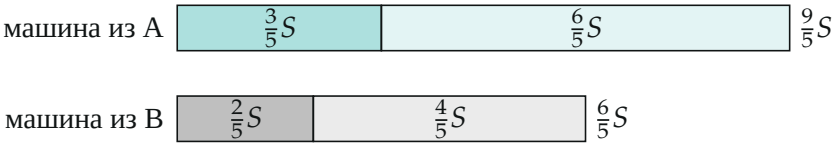
Проверим по машине из B: от первой встречи ($x = \frac{3}{5}S$) до A она проезжает $\frac{3}{5}S$, остаток после разворота $\frac{4}{5}S - \frac{3}{5}S = \frac{1}{5}S$, и едет к B; координата $x = \frac{1}{5}S$. Обе машины пришли в одну точку — встреча действительно

лоб в лоб.



Второй способ — график координаты x от времени (единица вдоль оси t — время t_1; точки вычислены по скоростям 3 : 2): бирюзовая линия — машина из A, чёрная — из B. Пересечения линий — встречи: первая при t_1 на расстоянии $\frac{3}{5}S$ от A, вторая при $3t_1$ на расстоянии $\frac{1}{5}S$ от A.

5. Проверка по графику. Возьмём $S = 5$ условных единиц, $t_1 = 1$: тогда $v_1 = 3$, $v_2 = 2$. Машина из A доезжает до B в момент $t = \frac{5}{3}$, машина из B — до A в момент $t = \frac{5}{2}$. После этого $x_1 = 5 - 3(t - \frac{5}{3})$ и $x_2 = 2(t - \frac{5}{2})$. Приравняем: $10 - 3t = 2t - 5$, откуда $t = 3$ и $x = 1 = \frac{1}{5}S$. Совпало с пунктом 4 — и время $3t_1$ вышло, как предсказано.



Накопленные пути машин (длины сегментов пропорциональны путям): тёмный сегмент — до первой встречи, светлый — от первой встречи до второй; у каждой машины второй сегмент вдвое длиннее первого. Справа — весь путь до второй встречи.

Проверка. Размерность: ответ — доля расстояния S. Предел: при равных скоростях первая встреча была бы посередине дороги, обе машины одновременно доехали бы до чужих городов, и вторая встреча произошла бы тоже посередине; тем же расчётом это получается (путь каждой между встречами вдвое больше пути до первой встречи, $S/2 \to S$). Для данных задачи: машина из А проехала до второй встречи $\frac{9}{5}S$, то есть $S + \frac{4}{5}S$ — дошла до В и вернулась на $\frac{4}{5}S$; машина из В проехала $\frac{6}{5}S = S + \frac{1}{5}S$ — дошла до А и вернулась на $\frac{1}{5}S$. Обе попали в одну точку $x = \frac{1}{5}S$.

Смысл такой: за одно и то же время машины вместе проезжают одно и то же расстояние, поэтому между встречами проходит ровно вдвое больше времени, чем до первой.

Ответ. На расстоянии $S/5$ от города А.