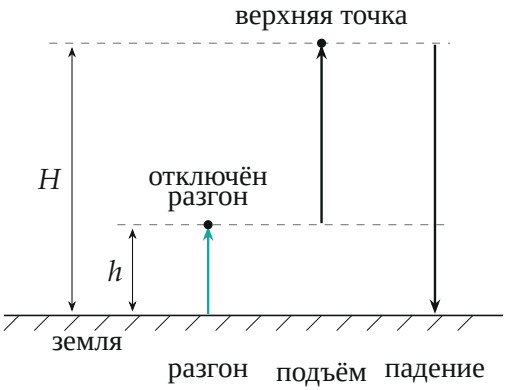
Ракета с отключением двигателя

Задача 2. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 2] С поверхности Земли стартует ракета и движется вертикально вверх с ускорением $a = 2g$. Через время t_0 двигатель отключается. Через какое время после этого ракета упадёт на Землю?



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): три стадии движения ракеты по вертикали (стадии разнесены по горизонтали для наглядности). Бирюзовая стрелка — разгон с $a = 2g$ до высоты h, чёрные — движение под действием одной силы тяжести: подъём по инерции до высоты H и падение на Землю.

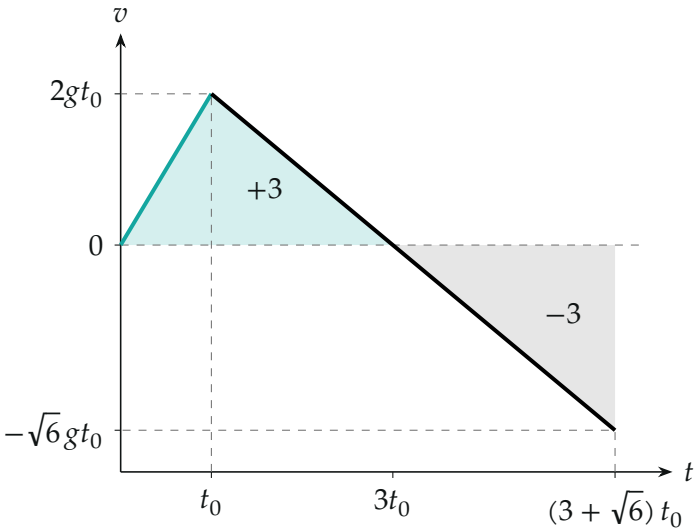
▲ **Решение. Что происходит.** Сначала двигатель разгоняет ракету из состояния покоя с ускорением $2g$. После отключения единственная сила — сила тяжести, и ускорение равно $-g$ (вверх направлена ось). Скорость в этот момент не равна нулю, она направлена вверх, поэтому ракета ещё поднимется выше, остановится и только потом упадёт. Главная идея: взять высоту и скорость ракеты в момент отключения двигателя как начальные условия для движения под действием одной силы тяжести и найти момент, когда её высота снова станет нулём.

Обозначения. Ось y направим вертикально вверх, начало — на поверхности Земли. Время t после отключения двигателя отсчитываем от самого отключения; t_1 — искомое время падения на Землю. Сопротивление воздуха не учитываем, g считаем постоянным.

1. Разгон. Ракета стартует из покоя и движется с постоянным ускорением $a = 2g$ в течение t_0. К моменту отключения двигателя

$$h = \frac{a\,t_0^2}{2} = g\,t_0^2, \qquad v = a\,t_0 = 2g\,t_0.$$

Обратите внимание: скорость $v = 2g\,t_0$ направлена вверх: после отключения ракета не падает сразу, а продолжает подниматься.



Скорость ракеты $v(t)$ с момента старта (время — в единицах t_0, скорость — в единицах gt_0; точки вычислены). Площадь под графиком — перемещение: вверх на $3gt_0^2 = H$ до остановки при $t = 3t_0$, затем вниз на ту же величину до падения (числа — в единицах gt_0^2).

2. Движение после отключения двигателя. Ускорение равно $-g$, начальная высота h, начальная скорость v. Закон движения

$$y(t) = h + vt - \frac{g\,t^2}{2} = g\,t_0^2 + 2g\,t_0\,t - \frac{g\,t^2}{2}.$$

3. Момент падения. В момент падения $y(t_1) = 0$:

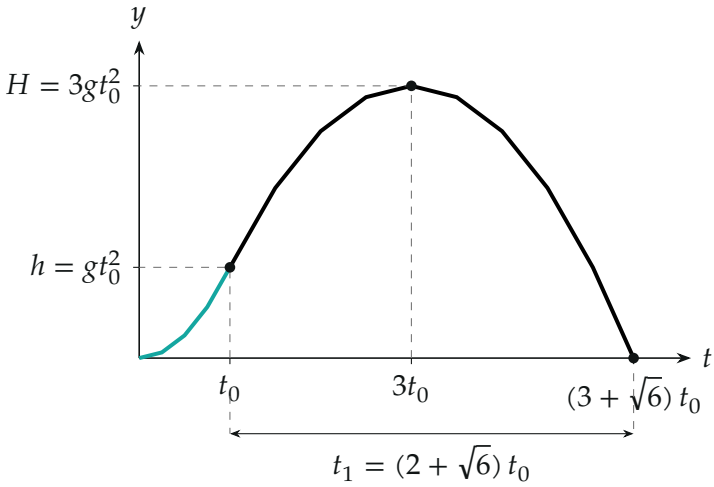
$$g\,t_0^2 + 2g\,t_0\,t_1 - \frac{g\,t_1^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1^2 - 4t_0\,t_1 - 2t_0^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение; дискриминант $D = 16t_0^2 + 8t_0^2 = 24t_0^2$, откуда

$$t_1 = \frac{4t_0 \pm \sqrt{24}\,t_0}{2} = (2 \pm \sqrt{6})\,t_0.$$

Корень со знаком «минус» отрицателен ($2 - \sqrt{6} \approx -0{,}45$) — это момент «до отключения», когда формула движения под действием одной силы тяжести ещё не применима, поэтому его отбрасываем. Остаётся

$$t_1 = (2 + \sqrt{6})\,t_0 \approx 4{,}45\,t_0.$$



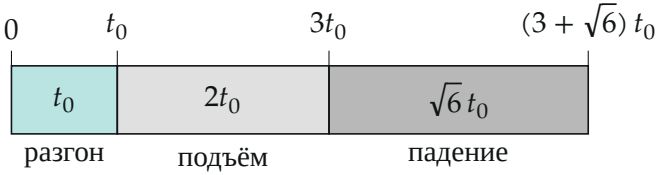
Высота ракеты $y(t)$ (время — в единицах t_0, высота — в единицах gt_0^2; точки вычислены): бирюзовый участок — разгон, чёрный — полёт под действием силы тяжести. Ракета поднимается до $H = 3gt_0^2$ при $t = 3t_0$ и падает при $t = (3 + \sqrt{6})\,t_0$; интервал после отключения двигателя — t_1.

4. Второй способ — по стадиям. После отключения ракета поднимается ещё $v/g = 2t_0$ (скорость падает до нуля). Дополнительная высота

подъёма $v^2/(2g) = 2g\,t_0^2$, поэтому наибольшая высота $H = h + 2g\,t_0^2 = 3g\,t_0^2$. Затем ракета свободно падает с высоты H из состояния покоя:

$$H = \frac{g\,t_{\text{пад}}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{6}\,t_0.$$

Время падения после отключения двигателя $t_1 = 2t_0 + \sqrt{6}\,t_0 = (2 + \sqrt{6})\,t_0$ — то же, что в пункте 3.



Хронология полёта в одном масштабе: разгон t_0, подъём по инерции после отключения $2t_0$, свободное падение $\sqrt{6}\,t_0$. Искомое время после отключения — вторая и третья части вместе.

Проверка. Размерность: t_1 пропорционально t_0 — время. Общий случай: при ускорении a вместо $2g$ получаем $t_1^2 - 2\dfrac{a}{g}\,t_0 t_1 - \dfrac{a}{g}\,t_0^2 = 0$ и $t_1 = \dfrac{a}{g}\,t_0 + t_0\sqrt{\dfrac{a^2}{g^2} + \dfrac{a}{g}}$; при $a = 2g$ это $(2 + \sqrt{6})\,t_0$. Предел $a \to 0$: ракета никуда не взлетает, и $t_1 \to 0$. Числа: при $g = 10$ м/с^2 и $t_0 = 10$ с ракета поднимается на $h = 1000$ м со скоростью 200 м/с, достигает $H = 3000$ м и падает на Землю через 44,5 с после отключения двигателя — время $t_1 \approx 4{,}45\,t_0$ из формулы.

Смысл такой: после отключения двигателя ракета ещё долго поднимается — вдвое дольше, чем разгонялась, — и этим объясняется, что время падения значительно больше t_0.

Ответ. $t_1 = (2 + \sqrt{6})\,t_0 \approx 4{,}45\,t_0$.