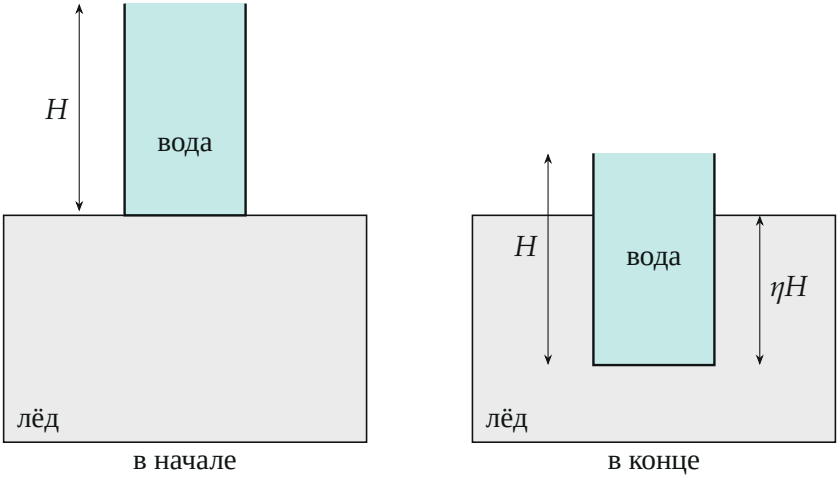
Ведро с водой на льду

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 3] На лёд, имеющий температуру $t_1 = 0\,^\circ\text{C}$, поставили тонкостенное цилиндрическое ведро, полностью заполненное водой с температурой $t = 50\,^\circ\text{C}$. На какую часть своей высоты ведро погрузится в лёд при остывании воды? Считать, что всё тепло, отданное водой, получает лёд. Теплоёмкостью ведра пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_1 = 900$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): ведро с водой на льду в начале и в конце; H — высота ведра, ηH — глубина, на которую оно погрузилось в лёд.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода в ведре остывает до температуры льда $0\,^\circ\text{C}$ и отдаёт тепло; по условию всё оно идёт на плавление льда под ведром. Растаявший лёд освобождает место, и ведро опускается: оно погружается на такую часть своей высоты, объём которой равен объёму растаявшего льда. Главная идея: сравнить объём освободившегося места $V_1 = m_1/\rho_1$ с объёмом ведра $V = m/\rho$, где m — масса воды в ведре, m_1 — масса растаявшего льда.

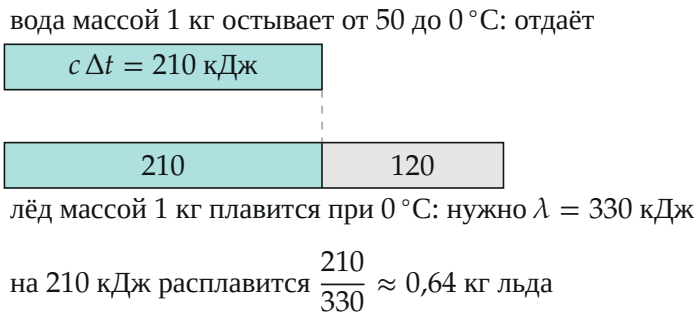
Обозначения. m — масса воды в ведре, $V = m/\rho$ — объём ведра (оно заполнено водой полностью); m_1 — масса растаявшего льда, V_1 — объём освободившегося места; η — искомая доля высоты ведра, на которую оно погрузилось. Ведро цилиндрическое, поэтому объём погружённой части пропорционален глубине погружения.

1. Тепло, отданное водой. Вокруг ведра лёд с температурой 0 °C, поэтому вода остывает ровно до $t_1 = 0\,^\circ\text{C}$ и дальше не замерзает: теплообмена между водой и льдом при одинаковой температуре нет. Вода отдаёт теплоту

$$Q = c\,m\,(t - t_1).$$

2. Масса растаявшего льда. Лёд при 0 °C плавится; по условию всё тепло Q получает лёд, и оно идёт на плавление:

$$\lambda\,m_1 = Q = c\,m\,(t - t_1) \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{c\,m\,(t - t_1)}{\lambda}.$$



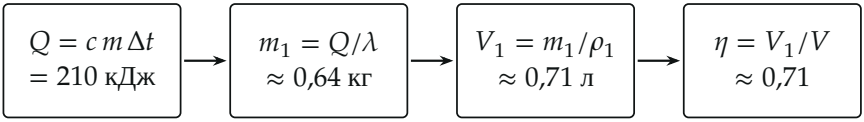
Тепловой баланс на 1 кг воды (длины полос пропорциональны энергии): вода отдаёт 210 кДж, а на плавление 1 кг льда нужно 330 кДж, поэтому расплавится $210/330 \approx 0{,}64$ кг льда.

3. Объём освободившегося места. Растаявший лёд занимал объём $V_1 = m_1/\rho_1$. Ведро тонкостенное, поэтому оно опускается на всю высоту растаявшего слоя: талая вода (её объём меньше) вытекает наружу и в образовавшейся полости под ведром не остаётся. Значит, объём по-

гружённой части ведра равен V_1:

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{c\,m\,(t - t_1)}{\lambda\,\rho_1}.$$

Обратите внимание: массу льда нужно делить на плотность льда ρ_1, а объём ведра выражается через плотность воды ρ: $V = m/\rho$. Перепутать ρ и ρ_1 — типичная ошибка, она заметно меняет ответ.



на примере воды массой $m = 1$ кг в ведре объёмом $V = m/\rho = 1$ л

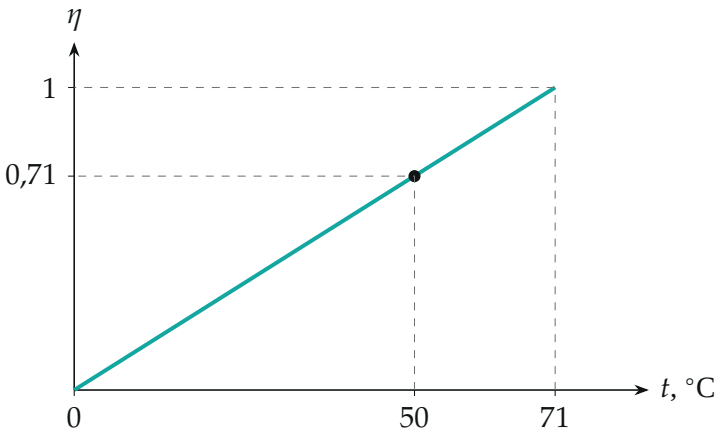
Цепочка расчёта: тепло → масса растаявшего льда → объём освободившегося места → доля погружения (числа — для 1 кг воды).

4. Доля высоты. У цилиндра объём пропорционален высоте при одной и той же площади сечения S: $V_1 = S \cdot \eta H$ и $V = S \cdot H$. Поэтому

$$\eta = \frac{V_1}{V} = \frac{c\,m\,(t - t_1)}{\lambda\,\rho_1} \cdot \frac{\rho}{m} = \frac{c\,(t - t_1)\,\rho}{\lambda\,\rho_1}.$$

Масса воды m сократилась — ответ не зависит от размера ведра. Подставим числа:

$$\eta = \frac{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 1000}{3{,}3 \cdot 10^5 \cdot 900} = \frac{2{,}1 \cdot 10^8}{2{,}97 \cdot 10^8} \approx 0{,}71.$$



Доля погружения η в зависимости от начальной температуры воды t: прямая $\eta = \dfrac{c\,\rho}{\lambda\,\rho_1}\,t \approx 0{,}0141\,t$ (в градусах Цельсия). Точка — условие задачи ($50\,^\circ C$, $\eta \approx 0{,}71$); при $t \approx 71\,^\circ C$ ведро погрузилось бы целиком.

Проверка. Размерность: $c\,(t - t_1)/\lambda$ — отношение масс (джоуль на килограмм делим на джоуль на килограмм), умножение на ρ/ρ_1 безразмерно, ответ безразмерен. Предел: при $t = t_1$ вода не отдаёт тепла, и $\eta = 0$. Ответ меньше единицы: ведро не уходит в лёд целиком, как и должно быть. Второй способ — на 1 кг воды ($V = 1$ л): отдаётся 210 кДж, плавится 0,636 кг льда, его объём $0{,}636/900 \cdot 1000 \approx 0{,}707$ л, то есть 0,71 от объёма ведра.

Смысл такой: чем горячее вода, тем больше льда она растопит и тем глубже уйдёт ведро; при $\rho_1 < \rho$ освободившийся объём льда больше объёма той же массы воды, поэтому погружение выходит больше, чем при равных плотностях.

Ответ. $\eta = \dfrac{c\,(t - t_1)\,\rho}{\lambda\,\rho_1} \approx 0{,}71$: ведро погрузится в лёд примерно на 0,71 своей высоты.