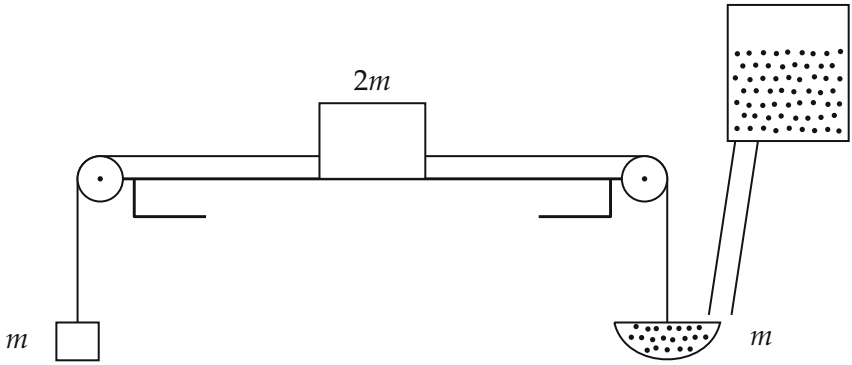
Тела на нитях и чашка с песком

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Два тела с массами m и $2m$ связали невесомой и нерастяжимой нитью. Нить перекинули через блок, укреплённый на краю стола. Затем к телу массой $2m$ прикрепили ещё одну нить, которую перебросили через блок, укреплённый на противоположном краю стола, а к ней привязали чашку массой m (см. рисунок). Затем в эту чашку насыпали тонкой струйкой песок из бункера. Найти ускорение тел, если масса песка в чашке вдвое превосходит ту минимальную массу песка, при которой тела сдвинутся с места. Коэффициент трения между телом $2m$ и поверхностью μ.



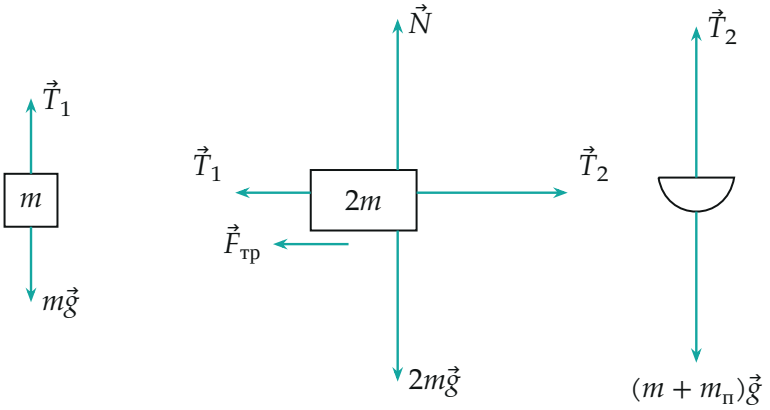
▲ **Решение. Что происходит.** Два блока и две нерастяжимые нити связывают три тела: тело $2m$ на столе, груз m слева и чашка с песком справа. Если тело $2m$ сдвинется вправо, чашка пойдёт вниз, а левый груз — вверх, и у всех трёх ускорения одинаковы по модулю. Пока песка мало, всё неподвижно: трение покоя уравновешивает разность натяжений нитей. Когда оно достигает наибольшего значения μN, тела трогаются, и дальше действует трение скольжения. Задача в два этапа: сначала найти пороговую массу песка из условия покоя, потом написать второй закон Ньютона для трёх тел при вдвое большей массе песка и сложить уравнения — натяжения сократятся.

Обозначения. $m_{\text{п}}$ — масса песка в чашке; $m_{\min}$ — пороговая масса; T_1 — натяжение левой нити (между грузом m и телом $2m$), T_2 — правой

нити (между телом $2m$ и чашкой); N — нормальная реакция стола; $F_{\text{тр}}$ — сила трения; a — модуль ускорения. Блоки и нити невесомы, трения в блоках нет, струйка песка тонкая (её импульсом пренебрегаем). Ось для каждого тела — по направлению его движения: груз m — вверх, тело $2m$ — вправо, чашка — вниз; тогда у всех $a > 0$.

1. Пороговая масса песка. До начала движения все ускорения равны нулю. Груз m висит: $T_1 = mg$. Чашка с песком: $T_2 = (m+m_{\text{п}})g$. Тело $2m$ в горизонтальной проекции: $T_2 - T_1 - F_{\text{тр}} = 0$, в вертикальной $N = 2mg$. Отсюда сила трения покоя, направленная влево:

$$F_{\text{тр}} = T_2 - T_1 = m_{\text{п}}\, g.$$



Силы в покое при $m_n = m_{\min}$ (для рисунка $\mu = 0{,}5$, длины стрелок пропорциональны силам): $T_1 = mg$, $T_2 = 2mg$, $F_{mp} = \mu N = mg$

Сила трения покоя растёт вместе с массой песка, но не может превышать $\mu N = 2\mu mg$. Тела сдвинутся, как только $m_{\text{п}}g$ достигнет этого значения:

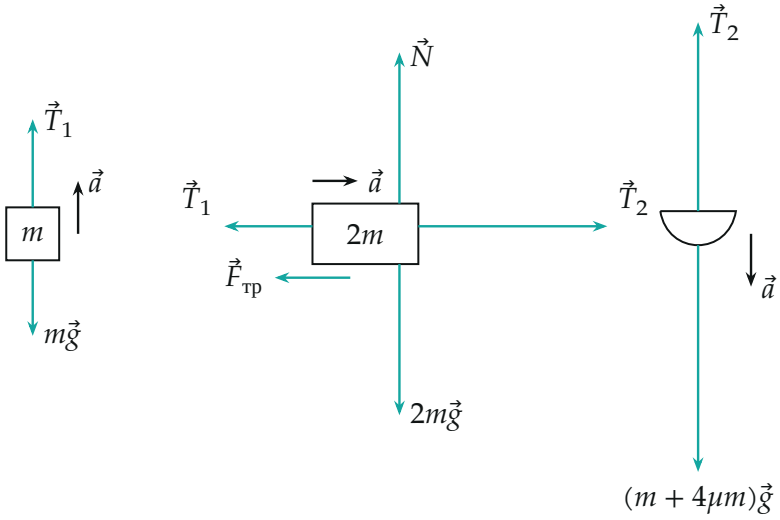
$$m_{\min}\, g = 2\mu mg \quad \Rightarrow \quad m_{\min} = 2\mu m.$$

Обратите внимание: трение покоя равно μN только на пороге; до него оно меньше и равно $m_{\text{п}}g$.

2. Движение при вдвое большей массе песка. $m_{\text{п}} = 2m_{\min} = 4\mu m$, масса чашки с песком $m+4\mu m$. Теперь тела скользят, и трение — трение

скольжения $\mu N = 2\mu mg$ (нормальная реакция по-прежнему $N = 2mg$: нити горизонтальны). Второй закон Ньютона в проекциях на оси движения:

$$\begin{aligned} &\text{груз } m: && ma = T_1 - mg, \\ &\text{тело } 2m: && 2ma = T_2 - T_1 - 2\mu mg, \\ &\text{чашка с песком}: && (m + 4\mu m)\, a = (m + 4\mu m)\, g - T_2. \end{aligned}$$



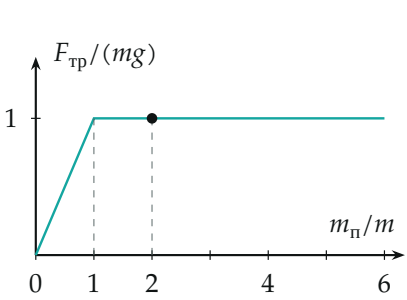
Силы при движении (для рисунка $\mu = 0{,}5$, тогда $a = g/6$): $T_1 = \frac{7}{6}mg$, $T_2 = \frac{5}{2}mg$, $F_{тр} = mg$; стрелки сил — в масштабе mg = 1 см, ускорения показаны отдельно

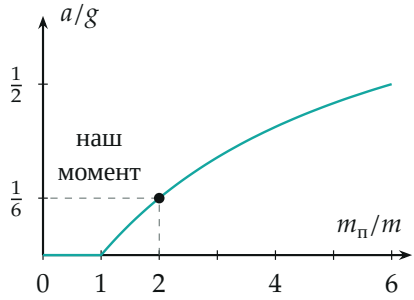
Сложим три уравнения: T_1 и T_2 сократятся.

$$(m + 2m + m + 4\mu m)\, a = (m + 4\mu m)g - mg - 2\mu mg = 2\mu mg,$$

$$a = \frac{2\mu mg}{4m\,(1 + \mu)} = \frac{\mu g}{2\,(1 + \mu)}.$$

Груз m движется вверх, тело $2m$ — вправо, чашка — вниз.





Слева — сила трения от массы песка (в единицах mg, при $\mu = 0{,}5$): наклонный участок — трение покоя, горизонтальный — трение скольжения μN; порог $m_{\min} = m$, наш случай $m_n = 2m$. Справа — ускорение: до порога нуль, затем рост, предел — g

Проверка. При $\mu \to 0$ порог $m_{\min} \to 0$, песка нет, массы m слева и справа равны, $a \to 0$ — формула даёт то же. При $\mu \to \infty$ масса песка огромна, и тела m и $2m$ почти не мешают: $a \to g/2$ (на чашке сила $4\mu mg$, трение $2\mu mg$, масса $4\mu m$). Численно при $\mu = 0{,}5$: $a = g/6$, $T_1 = \frac{7}{6}mg$, $T_2 = \frac{5}{2}mg$; уравнение для тела $2m$: $\frac{2}{6}mg = \frac{5}{2}mg - \frac{7}{6}mg - mg = \frac{1}{3}mg$ — верно. Размерность: μg — ускорение.

Ответ. $a = \dfrac{\mu g}{2\,(1+\mu)}$.