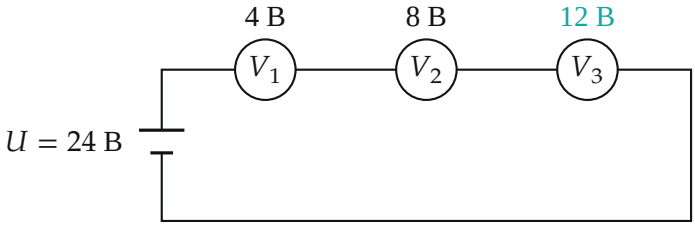
Четыре вольтметра

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Имеется идеальный источник напряжения $U = 24$ В и четыре вольтметра. Если к источнику подсоединить последовательно соединённые вольтметры 1, 2 и 3, то вольтметры 1 и 2 покажут напряжения $U_1 = 4$ В и $U_2 = 8$ В соответственно. Если к источнику подсоединить последовательно соединённые вольтметры 2, 3 и 4, вольтметр 4 покажет напряжение $U_4 = 16$ В. Какими будут показания всех вольтметров, если их подключить последовательно к данному источнику?



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): первый опыт — вольтметры 1, 2, 3 последовательно к источнику. Показание третьего вольтметра (бирюзовое) найдено ниже, в пункте 1.

▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — это прибор с большим, но конечным сопротивлением, поэтому при последовательном соединении через все вольтметры идёт один и тот же ток. По закону Ома показание вольтметра $U_k = I\,R_k$ пропорционально его сопротивлению. Источник идеальный, значит, сумма показаний равна U. Главная идея: из двух опытов найти отношение сопротивлений всех четырёх вольтметров — оно свойство приборов и не зависит от схемы — и потом разделить U в этом отношении.

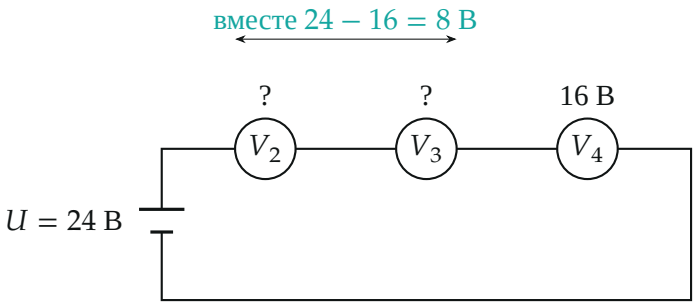
Обозначения. $R_1, \ldots, R_4$ — сопротивления вольтметров; I — ток в цепи; U_k — показание k-го вольтметра. В последнем опыте показания обозначим штрихами U'_k.

1. Первый опыт. Вольтметры 1, 2, 3 включены последовательно, источник идеальный (напряжение на нём не зависит от тока):

$$U_1 + U_2 + U_3 = U \quad \Rightarrow \quad U_3 = 24 - 4 - 8 = 12\ \text{В}.$$

Через приборы течёт один ток, поэтому по закону Ома для участка цепи $R_k = U_k/I$, и сопротивления относятся как показания:

$$R_1 : R_2 : R_3 = U_1 : U_2 : U_3 = 4 : 8 : 12 = 1 : 2 : 3.$$



Второй опыт — вольтметры 2, 3, 4 последовательно. Показание четвёртого вольтметра известно, показания второго и третьего не заданы, но вместе они дают $24 - 16 = 8$ *В.*

2. Второй опыт. Здесь включены вольтметры 2, 3, 4. Сумма показаний равна U, а $U_4 = 16$ В, поэтому на вольтметры 2 и 3 вместе приходится $24 - 16 = 8$ В. Ток опять один и тот же, а напряжение пропорционально сопротивлению, поэтому напряжение на вольтметре 4 относится к суммарному напряжению на 2 и 3 как сопротивления:

$$\frac{R_4}{R_2 + R_3} = \frac{16}{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad R_4 = 2\,(R_2 + R_3) = 2\,(2 + 3)\,R_1 = 10\,R_1.$$

Обратите внимание: в этом опыте вольтметра 1 нет, и сравнивать нужно не напряжения «вообще» (в разных опытах они разные), а сопротивления, которые у каждого прибора одни и те же. Поэтому отношение $R_2 : R_3 = 2 : 3$ из первого опыта сохраняется во втором.

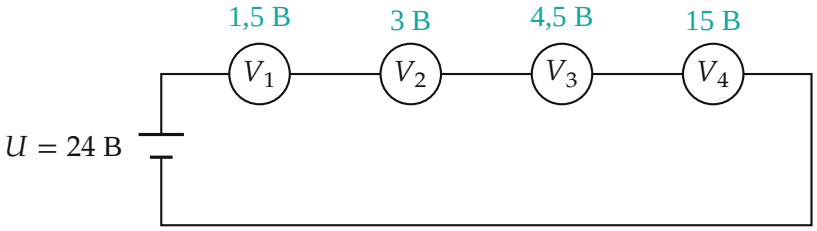
3. Все четыре вольтметра. Сопротивления относятся как

$$R_1 : R_2 : R_3 : R_4 = 1 : 2 : 3 : 10.$$

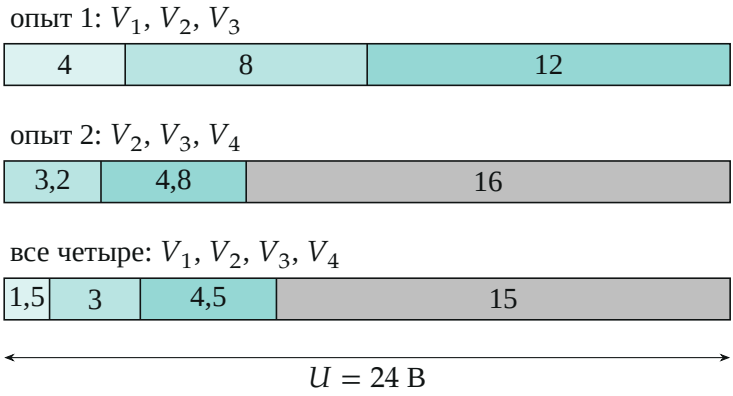
При последовательном включении ток один, показания пропорцио-

нальны сопротивлениям: $U'_k = \dfrac{R_k}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} U = \dfrac{R_k}{16R_1} U$. Одна «часть» равна $\dfrac{U}{16} = 1{,}5$ В, поэтому

$$U'_1 = \frac{U}{16} = 1{,}5 \text{ В}, \quad U'_2 = \frac{U}{8} = 3 \text{ В},$$
$$U'_3 = \frac{3U}{16} = 4{,}5 \text{ В}, \quad U'_4 = \frac{5U}{8} = 15 \text{ В}.$$



Последнее подключение: все четыре вольтметра последовательно. Показания найдены в пункте 3 (бирюзовым).



Как напряжение 24 В делится между вольтметрами в трёх включениях (длина сегмента пропорциональна показанию, числа — в вольтах; цвет — номер вольтметра: светлее — меньше сопротивление). Во втором опыте показания 3,2 и 4,8 В вычислены по отношению 2 : 3 и в условии не заданы.

Проверка. Сумма показаний: $1{,}5 + 3 + 4{,}5 + 15 = 24$ В — равна U. Второй способ — через ток: возьмём $R_1 = 1$ кОм, тогда $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 10$ кОм. Первый опыт: $I = 24/(1 + 2 + 3) = 4$ мА, $U_1 = 4$ В, $U_2 = 8$ В — как в условии. Второй опыт: $I = 24/(2 + 3 + 10) = 1{,}6$ мА, $U_4 = 1{,}6 \cdot 10 = 16$ В — как в условии. Все четыре: $I = 24/16 = 1{,}5$ мА, $U'_k = 1{,}5\,R_k$, то есть 1,5; 3; 4,5; 15 В — те же числа.

Смысл такой: у вольтметров с гораздо большим сопротивлением показание больше — четвёртый прибор с сопротивлением $10R_1$ забирает бóльшую часть напряжения.

Ответ. $U'_1 = 1{,}5$ В; $U'_2 = 3$ В; $U'_3 = 4{,}5$ В; $U'_4 = 15$ В.