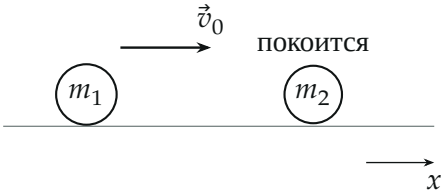
Упругий удар двух тел

Задача 1. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 1] Тело массой m_1 налетает на покоящееся тело с некоторой неизвестной массой m_2. Известно, что после центрального абсолютно упругого столкновения импульс тела с массой m_1 вдвое превосходит импульс тела с массой m_2. Найти массу m_2.



Поясняющий рисунок: до удара тело m_1 движется со скоростью $\vec{v}_0$, тело m_2 покоится; удар центральный — всё движение вдоль одной прямой

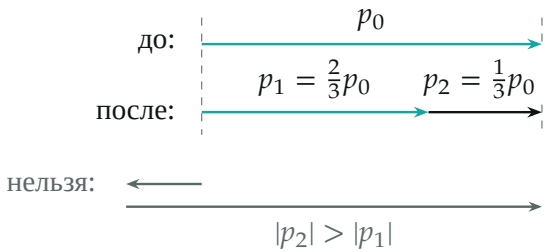
▲ **Решение. Что происходит.** Удар центральный, поэтому и до, и после удара тела движутся вдоль одной прямой — задача одномерная. Удар абсолютно упругий: сохраняются и импульс системы двух тел, и её кинетическая энергия. Класс задачи — упругий удар; удобно писать оба закона прямо через импульсы, потому что условие дано про импульсы: кинетическая энергия тела $E = p^2/2m$.

Обозначения. Ось x — вдоль скорости налетающего тела. $p_0 = m_1 v_0$ — импульс тела m_1 до удара; p_1 и p_2 — проекции импульсов тел m_1 и m_2 на ось x после удара.

1. Куда летит тело m_1 после удара. Тело m_2 толкнули вперёд, значит, $p_2 > 0$. Закон сохранения импульса системы двух тел за время удара в проекции на ось x (внешние силы вдоль x не действуют, а удар короткий):

$$p_0 = p_1 + p_2.$$

Если бы тело m_1 отскочило назад ($p_1 < 0$), то $p_2 = p_0 + |p_1| > |p_1|$ — импульс второго тела оказался бы больше, а по условию он вдвое меньше. Значит, $p_1 > 0$: тело m_1 после удара продолжает движение вперёд, и $p_1 = 2p_2$.



Импульсы вдоль оси x: сумма импульсов после удара равна p_0. Если m_1 отскакивает назад (внизу), p_2 длиннее p_1 — противоречит условию

2. Импульсы после удара. Из двух уравнений $p_0 = p_1 + p_2$ и $p_1 = 2p_2$:

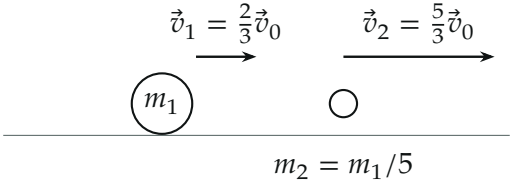
$$p_2 = \frac{p_0}{3}, \qquad p_1 = \frac{2p_0}{3}.$$

3. Закон сохранения кинетической энергии при абсолютно упругом ударе, записанный через импульсы ($E = p^2/2m$):

$$\frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}.$$

Подставим импульсы из пункта 2:

$$\frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{4p_0^2}{9 \cdot 2m_1} + \frac{p_0^2}{9 \cdot 2m_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_1}\left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{9m_2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{m_1}{5}.$$



После удара: оба тела летят вперёд; лёгкое тело m_2 — быстрее налетающего

4. Скорости после удара. $v_1 = \dfrac{p_1}{m_1} = \dfrac{2}{3}v_0$, $v_2 = \dfrac{p_2}{m_2} = \dfrac{p_0/3}{m_1/5} = \dfrac{5}{3}v_0$. Лёгкое тело улетает вперёд быстрее, тяжёлое продолжает двигаться медленнее, но импульс у тяжёлого больше — за счёт массы.

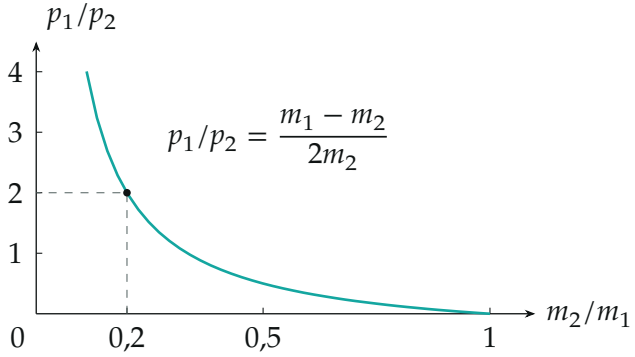
Обратите внимание. Условие «импульс вдвое больше» без знака ещё не говорит, куда летит m_1; направление пришлось установить из закона сохранения импульса (пункт 1). При $m_2 > m_1$ первое тело отскочило бы назад, и равенство $|p_1| = 2|p_2|$ стало бы невозможным.

Проверка. Второй способ — известные формулы скоростей после центрального упругого удара о покоящееся тело:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_0, \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\,v_0,$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1(m_1 - m_2)}{2m_1 m_2} = \frac{m_1 - m_2}{2m_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 5m_2.$$

Совпало. Ещё признак упругого удара: относительная скорость меняет знак, не меняя величины: $v_2 - v_1 = \frac{5}{3}v_0 - \frac{2}{3}v_0 = v_0$ — верно.



Отношение импульсов после удара в зависимости от отношения масс; значение 2 достигается только при $m_2/m_1 = 0{,}2$

Смысл: чтобы налетающее тело сохранило вдвое больший импульс, чем передало, второе тело должно быть заметно легче — в пять раз.

Ответ. $m_2 = \dfrac{m_1}{5}$.