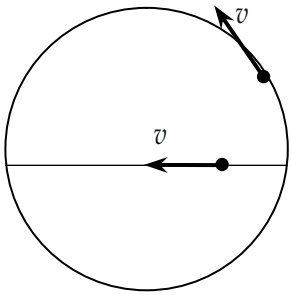
Окружность и диаметр

Задача 3. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Два тела одновременно начинают двигаться из одной точки с постоянными (и одинаковыми) скоростями v: одно — по окружности радиуса R, проходящей через эту точку, второе — по диаметру этой окружности (см. рисунок). Через какое время после начала движения расстояние между телами будет максимальным? Чему равно максимальное расстояние между телами? Ограничится рассмотрением промежутка времени, в течение которого второе тело прошло вдоль диаметра.



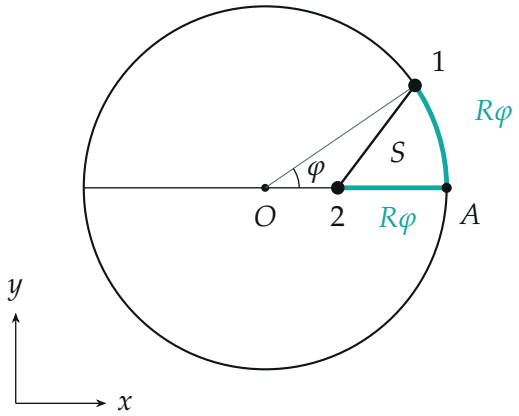
▲ **Решение. Что происходит.** Оба тела стартуют из точки A и разбегаются: одно уходит по диаметру, другое по дуге. Сначала их скорости почти противоположны по отношению к соединяющей прямой, и расстояние растёт. Когда тело на окружности пройдёт четверть круга, его скорость станет *параллельна* диаметру и в точности равна скорости второго тела: в этот момент тела движутся одинаково, расстояние перестаёт меняться — это и есть максимум. Класс задачи — кинематика двух тел и экстремум расстояния: расстояние растёт, пока относительная скорость направлена «от» второго тела вдоль соединяющей прямой.

Обозначения. O — центр окружности, A — точка старта; тело 1 движется по окружности, тело 2 — по диаметру AO; $\varphi = vt/R$ — угол, на который повернулся радиус тела 1 за время t; S — расстояние между телами. Оси: x вдоль диаметра, y — перпендикулярно, начало в O.

1. Положения тел в момент t. Скорости равны, поэтому пути равны: тело 1 прошло дугу длиной $vt = R\varphi$, тело 2 — отрезок той же длины $R\varphi$ вдоль диаметра от A к центру. Координаты:

$$\text{тело 1}: \ (R\cos\varphi;\ R\sin\varphi), \qquad \text{тело 2}: \ (R - R\varphi;\ 0).$$

Тело 2 проходит весь диаметр $2R$ за время $2R/v$, поэтому рассматриваем $0 \le \varphi \le 2$ (в радианах).



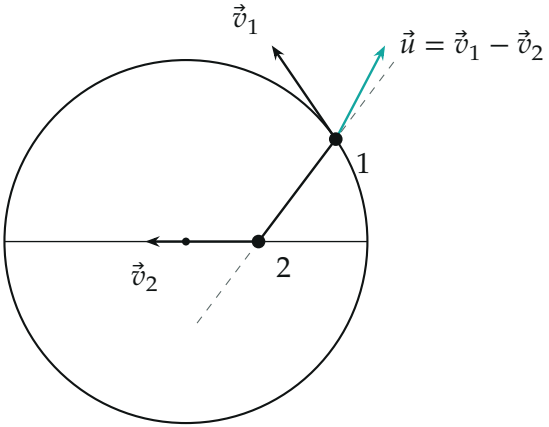
Положения тел через время t: дуга $A1$ и отрезок $A2$ имеют одну длину $R\varphi$; S — расстояние между телами

2. Когда расстояние растёт. Расстояние меняется только за счёт движения тел вдоль соединяющей их прямой. Перейдём в систему отсчёта тела 2: в ней тело 1 движется с относительной скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Расстояние растёт, если проекция $\vec{u}$ на направление «от тела 2 к телу 1» положительна, и убывает, если отрицательна. Скорость тела 1 направлена по касательной: $\vec{v}_1 = v(-\sin\varphi;\ \cos\varphi)$, скорость тела 2 — к центру вдоль диаметра: $\vec{v}_2 = v(-1;\ 0)$. Отсюда

$$\vec{u} = v\,(1 - \sin\varphi;\ \cos\varphi).$$



Скорости тел и относительная скорость $\vec{u}$ тела 1 в системе отсчёта тела 2; пунктир — прямая, соединяющая тела

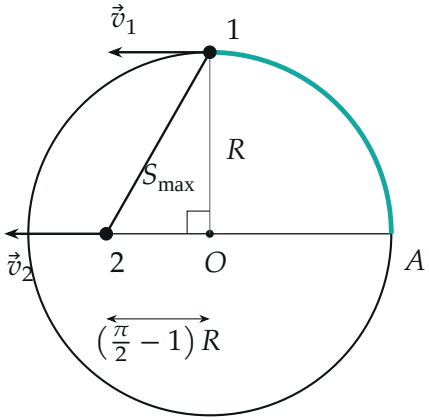
3. Знак скорости изменения расстояния. Вектор от тела 2 к телу 1 равен $R\,(\cos\varphi - 1 + \varphi;\ \sin\varphi)$. Скорость изменения расстояния — проекция $\vec{u}$ на этот вектор, делённая на S; её знак совпадает со знаком скалярного произведения

$$f(\varphi) = (\cos\varphi - 1 + \varphi)(1 - \sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi.$$

- При $0 < \varphi < \pi/2$ оба слагаемых положительны (дуга длиннее хорды, поэтому $\varphi > 1 - \cos\varphi$; $\sin\varphi < 1$, $\cos\varphi > 0$): расстояние растёт.
- При $\varphi = \pi/2$: $1 - \sin\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 0$, то есть $\vec{u} = 0$ — скорости тел совпали, расстояние на мгновение не меняется.
- При $\pi/2 < \varphi \le 2$ положим $\varphi = \pi/2 + \psi$, $0 < \psi \le 0{,}43$. Первое слагаемое $(\frac{\pi}{2} - 1 + \psi - \sin\psi)(1 - \cos\psi) \le 0{,}6 \cdot \psi^2/2 = 0{,}3\,\psi^2$, второе $-\cos\psi\sin\psi \le -0{,}9 \cdot 0{,}97\,\psi < -0{,}87\,\psi$. Так как $0{,}3\,\psi^2 < 0{,}87\,\psi$, сумма отрицательна: расстояние убывает.

Значит, максимум единственный — при $\varphi = \pi/2$:

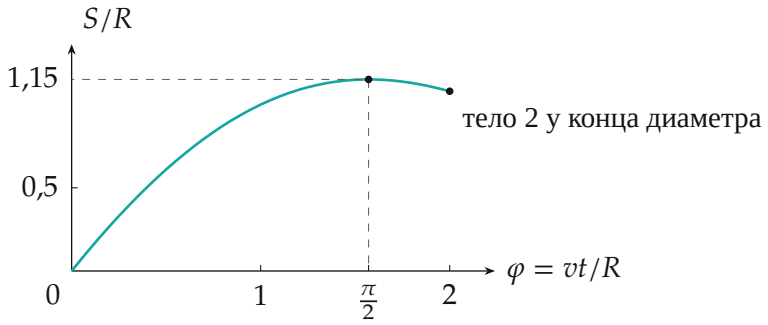
$$t = \frac{R\varphi}{v} = \frac{\pi R}{2v}.$$



Момент максимума: тело 1 прошло четверть окружности, его скорость равна скорости тела 2; расстояние — гипотенуза прямоугольного треугольника

4. Максимальное расстояние. При $\varphi = \pi/2$ тело 1 в верхней точке окружности, над центром: $(0;\ R)$. Тело 2 прошло $\dfrac{\pi R}{2} > R$ — оно уже за центром, на расстоянии $\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right) R$ от него. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника с вершиной в O:

$$S_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 R^2 + R^2} = \frac{R}{2}\sqrt{(\pi - 2)^2 + 4} \approx 1{,}15\, R.$$



Расстояние между телами в зависимости от угла $\varphi = vt/R$ (вычислено по координатам); максимум $1{,}15R$ при $\varphi = \pi/2$

Обратите внимание. Максимум достигается не тогда, когда тело 2 в центре, и не в конце движения: к концу диаметра ($\varphi = 2$) расстояние уже уменьшилось до $\approx 1{,}08\,R$. Признак экстремума — равенство скоростей тел (векторов, не только модулей): относительная скорость обращается в ноль.

Проверка. Размерность: $\pi R/(2v)$ — время, $S_{\max}$ — длина. Численно (график выше, $S^2/R^2 = (\cos\varphi - 1 + \varphi)^2 + \sin^2\varphi$ на сетке из 2000 точек): максимум $1{,}1514\,R$ при $\varphi = 1{,}571 \approx \pi/2$ — совпадает. Смысл: пока тело на окружности «уходит вбок», расстояние растёт; после четверти круга оно поворачивает навстречу диаметру и начинает догонять.

Ответ. $t = \dfrac{\pi R}{2v}$; $S_{\max} = \dfrac{R}{2}\sqrt{(\pi-2)^2+4} \approx 1{,}15\,R$.