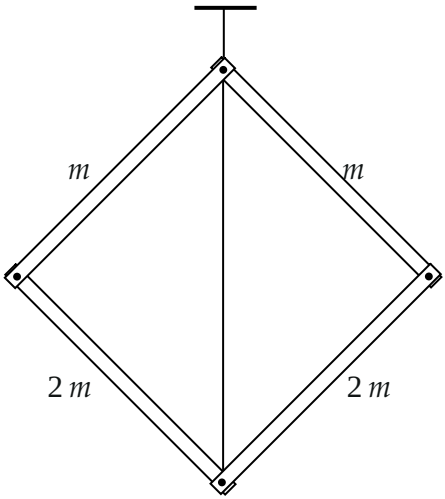
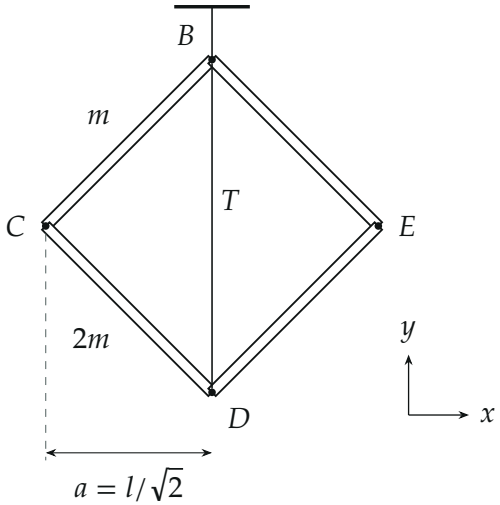
Квадрат из шарнирных стержней

Задача 4. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 4] Четыре стержня одинаковой длины с массами m, m, $2m$ и $2m$ соединили шарнирно. Затем вершины, в которых скреплены два стержня массой m и два стержня массой $2m$, соединили нерастяжимой веревкой такой длины, что конструкция из стержней представляет собой квадрат (см. рисунок). Квадрат подвесили на веревке к потолку за вершину, в которой скреплены два стержня массой m (см. рисунок). Найти силу натяжения веревки, соединяющей вершины квадрата.



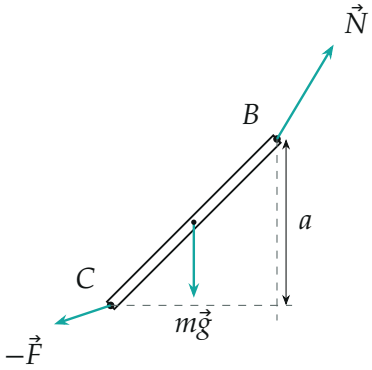
▲ **Решение.** **Что происходит.** Конструкция неподвижна, значит, для каждого стержня и для любой их группы сумма сил и сумма моментов сил равны нулю. Верёвка соединяет верхнюю и нижнюю вершины; она тянет нижнюю вершину вверх и тем самым поддерживает тяжёлые нижние стержни. Неизвестна сила, с которой стержни действуют друг на друга в боковых шарнирах, — её находим из условий моментов для верхнего и нижнего стержня, а потом натяжение — из условия сил для двух нижних стержней. Класс задачи — статика системы шарнирно связанных тел.

Обозначения. Вершины: B — верхняя, C и E — боковые, D — нижняя; l — длина стержня; диагональ BD вертикальна, поэтому каждый стержень наклонён под 45°, и его концы разнесены на $a = l/\sqrt{2}$ по горизонтали и по вертикали. Ось x — вправо, y — вверх. $\vec{F} = (F_x;\ F_y)$ — сила, с которой верхний левый стержень действует на нижний левый в шарнире C; по третьему закону Ньютона нижний действует на верхний силой $-\vec{F}$. T — натяжение верёвки. Конструкция симметрична относительно BD, поэтому достаточно рассмотреть левую половину.



Обозначения: вершины B, C, D, E; верёвка BD с натяжением T; проекции каждого стержня на оси равны $a = l/\sqrt{2}$

1. Условие моментов для верхнего левого стержня BC относительно точки B (так из уравнения выпадает неизвестная сила $\vec{N}$ шарнира B, в котором действуют и потолок, и верёвка, и правый стержень). На стержень действуют: $-\vec{F}$ в точке C (на a левее и на a ниже B) и $m\vec{g}$ в середине стержня (на $a/2$ левее B).

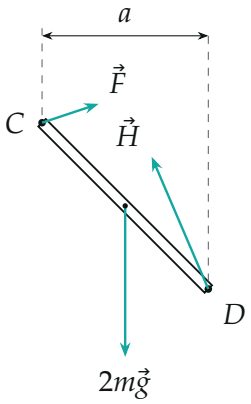


Силы на верхний левый стержень BC: $-\vec{F}$ от нижнего стержня, тяжесть $m\vec{g}$, $\vec{N}$ от шарнира B

Момент силы относительно B — сила, умноженная на плечо. Составляющая $-F_x$ (влево) с плечом a поворачивает стержень по часовой стрелке; составляющая $-F_y$ (вниз) с плечом a и сила тяжести с плечом $a/2$ — против часовой. Сумма моментов равна нулю:

$$F_x\, a = F_y\, a + mg\,\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad F_x - F_y = \frac{mg}{2}.$$

2. Условие моментов для нижнего левого стержня CD относительно точки D (выпадает неизвестная сила $\vec{H}$ шарнира D). Сила $\vec{F}$ приложена в точке C, на a левее и на a выше D; тяжесть $2mg$ — в середине, на $a/2$ левее D.



Силы на нижний левый стержень CD: $\vec{F}$ от верхнего стержня, тяжесть $2m\vec{g}$, $\vec{H}$ от шарнира D

Составляющие F_x (вправо, плечо a) и F_y (вверх, плечо a) поворачивают стержень по часовой стрелке, тяжесть — против:

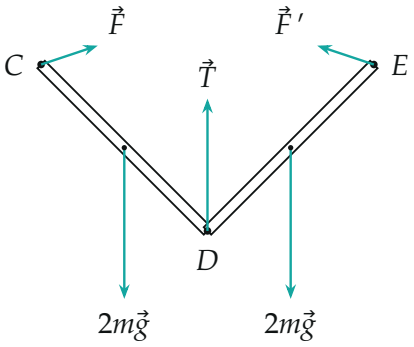
$$F_x a + F_y a = 2mg\,\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad F_x + F_y = mg.$$

3. Сила в боковом шарнире. Складываем и вычитаем уравнения пунктов 1 и 2:

$$F_x = \frac{3}{4}\,mg, \qquad F_y = \frac{1}{4}\,mg, \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}\,mg.$$

Обе составляющие положительны: верхний стержень давит на нижний в шарнире C внутрь квадрата и вверх.

4. Условие сил для двух нижних стержней вместе с шарниром D в проекции на ось y. Внутренние силы между ними (в шарнире D) в сумму не входят. Внешние силы: тяжесть $2mg + 2mg = 4mg$ вниз, натяжение верёвки T вверх (она привязана к вершине D), силы $\vec{F}$ и $\vec{F}\,'$ от верхних стержней в шарнирах C и E; по симметрии у $\vec{F}\,'$ та же вертикальная составляющая F_y, а горизонтальная — противоположна.



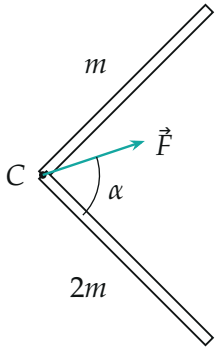
Внешние силы на систему «два нижних стержня»: натяжение верёвки $\vec{T}$,

тяжести и силы $\vec{F}$, $\vec{F}\,'$ от верхних стержней

$$T + 2F_y - 4mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 4mg - 2 \cdot \frac{mg}{4} = \frac{7}{2}\,mg.$$

$T > 0$: верёвка действительно натянута.

5. Направление силы $\vec{F}$ (так решают организаторы). Угол α между $\vec{F}$ и нижним стержнем: $\vec{F}$ направлена под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{F_y}{F_x} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$ к горизонтали, стержень CD — под 45° вниз, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = 2$. Условия моментов, записанные через α: $Fl\sin\alpha = 2mg\,\dfrac{l}{2}\cos 45^\circ$ и $Fl\cos\alpha = mg\,\dfrac{l}{2}\cos 45^\circ$ — их отношение и даёт $\operatorname{tg}\alpha = 2$.



Сила $\vec{F}$ в шарнире C составляет с нижним стержнем угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 2$

Обратите внимание. Сила в шарнире C направлена *не вдоль* стержня: стержни тяжёлые, и на каждый действуют три силы, а не две. Поэтому нельзя считать стержни «распорками». Нельзя и разделить вес поровну между шарнирами: условия моментов для верхнего и нижнего стержня различаются, и вертикальная составляющая $F_y = mg/4$ получается только из их совместного решения.

Проверка. Размерность: T — в единицах mg, сила. Второй способ — условие сил для нижнего левого стержня и шарнира D. Для стержня CD

по оси y: $F_y + H_y - 2mg = 0$, $H_y = \frac{7}{4}\,mg$. На шарнир D действуют верёвка (вверх, T) и два нижних стержня (каждый вниз, H_y): $T = 2H_y = \frac{7}{2}\,mg$ — совпало. Предел: если бы все стержни были лёгкими ($m \to 0$), верёвка не была бы нужна и $T \to 0$ — формула $T = \frac{7}{2}mg$ это даёт. Смысл: верёвка держит почти весь вес нижних стержней ($4mg$), а верхние стержни подпирают нижние лишь силой $2F_y = mg/2$.

Ответ. $T = \dfrac{7}{2}\,mg$.