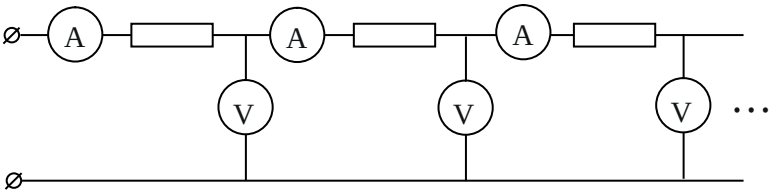
Бесконечная цепь приборов

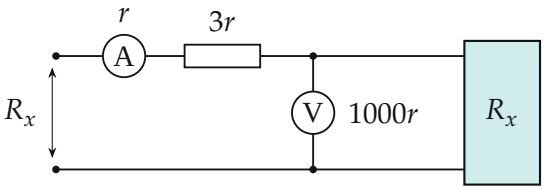
Задача 5. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 5] К источнику постоянного напряжения U подключили бесконечную цепь одинаковых амперметров, резисторов и вольтметров. Сопротивление каждого амперметра r, резистора $3r$, вольтметра $1000r$. Найти показания первого и второго амперметров, а также сумму показаний всех амперметров и вольтметров.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Приборы здесь неидеальны — это просто резисторы: амперметр r, резистор $3r$, вольтметр $1000r$; амперметр показывает ток через себя, вольтметр — напряжение на себе. Цепь — бесконечная лестница из одинаковых звеньев «амперметр + резистор последовательно, вольтметр поперёк». Главный приём: если отрезать первое звено, оставшаяся бесконечная цепь такая же, как вся, и её сопротивление то же. Класс задачи — бесконечные цепи, законы Ома и Кирхгофа.

Обозначения. R_x — сопротивление всей бесконечной цепи (со стороны источника); I_k — ток через k-й амперметр (он же через k-й резистор); U_k — показание k-го вольтметра; $U_0 = U$.

1. Сопротивление цепи. Первое звено — последовательно $r + 3r = 4r$, а за ним параллельно соединены первый вольтметр $1000r$ и остаток цепи, сопротивление которого снова R_x:



Отрезали первое звено: остаток бесконечной цепи — такая же цепь с тем же сопротивлением R_x

$$R_x = 4r + \frac{1000r \cdot R_x}{1000r + R_x} \quad \Rightarrow \quad R_x^2 - 4rR_x - 4000r^2 = 0.$$

Сопротивление положительно, поэтому берём положительный корень:

$$R_x = \left(2 + \sqrt{4004}\right) r \approx 65{,}3\, r \approx 65\, r.$$

2. Первый амперметр. Через него идёт весь ток источника. По закону Ома для всей цепи

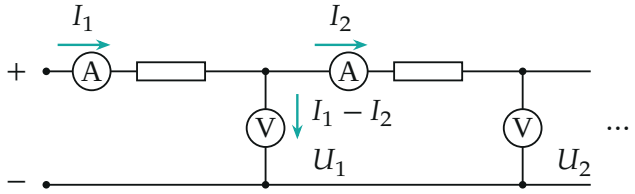
$$I_1 = \frac{U}{R_x} \approx \frac{U}{65\, r}.$$

3. Второй амперметр. Первый вольтметр подключён к тем же точкам, что и остаток цепи, его напряжение

$$U_1 = U - 4rI_1 = U\,\frac{R_x - 4r}{R_x} \approx \frac{61}{65}\,U.$$

Остаток цепи — такая же цепь, только под напряжением U_1 вместо U, поэтому все токи в нём в U_1/U раз меньше:

$$I_2 = \frac{U_1}{R_x} = qI_1, \qquad q = \frac{R_x - 4r}{R_x} \approx \frac{61}{65} \approx 0{,}94, \qquad I_2 \approx \frac{61\,U}{65^2\, r}.$$



Токи в первых двух звеньях: ток I_1 делится на ток первого вольтметра $I_1 - I_2$ и ток I_2 в остаток цепи

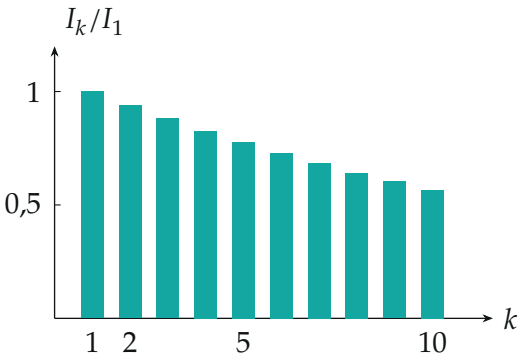
4. Сумма показаний вольтметров. Ток k-го вольтметра $I_k - I_{k+1}$ (закон сохранения заряда для узла), показание $U_k = 1000r\,(I_k - I_{k+1})$. Сумма телескопическая — промежуточные токи сокращаются, а $I_k \to 0$:

$$\sum_k U_k = 1000r\,(I_1 - I_2 + I_2 - I_3 + \dots) = 1000r\,I_1 = \frac{1000}{R_x/r}\,U \approx 15{,}3\,U.$$

5. Сумма показаний амперметров. Пройдём по верхнему проводу от источника вглубь цепи: напряжение U складывается из напряжений на всех амперметрах и резисторах (второй закон Кирхгофа; напряжение на далёком конце цепи стремится к нулю). На k-м звене это $I_k(r + 3r) = 4rI_k$:

$$U = 4r\sum_k I_k \quad \Rightarrow \quad \sum_k I_k = \frac{U}{4r}.$$

Это точный результат, без округлений; та же сумма — геометрическая прогрессия $I_1(1 + q + q^2 + \dots) = \dfrac{I_1}{1-q} = \dfrac{U}{R_x} \cdot \dfrac{R_x}{4r} = \dfrac{U}{4r}$.



Токи амперметров убывают геометрической прогрессией со знаменателем $q \approx 0{,}94$ — медленно, поэтому сумма в $1/(1-q) \approx 16$ раз больше I_1

Обратите внимание. Сумма показаний вольтметров ($\approx 15{,}3\,U$) больше напряжения источника — противоречия нет: вольтметры стоят параллельно, а не последовательно, их напряжения не обязаны складываться в U. У организаторов R_x округлено до $65r$, отсюда их $\dfrac{1000}{65}U \approx$

$15{,}4\,U$; точнее $\dfrac{1000}{65{,}28}U \approx 15{,}3\,U$.

Проверка. Размерности: U/r — ток. Число: $R_x^2 - 4rR_x = (4261{,}1 - 261{,}1)r^2 = 4000r^2$ — корень верен. Предел: если бы вольтметр был идеальным (∞), ток не уходил бы в поперечные ветви, а цепь была бы разомкнута — $R_x \to \infty$; при нашей формуле $R_x \approx \sqrt{R_V \cdot 4r}$ растёт с R_V, как и должно.

Ответ. $I_1 = \dfrac{U}{R_x} = \dfrac{U}{(2+\sqrt{4004})\,r} \approx \dfrac{U}{65\,r}$; $I_2 = \dfrac{R_x - 4r}{R_x} I_1 \approx \dfrac{61}{65} I_1 \approx \dfrac{61\,U}{65^2\,r}$; сумма показаний амперметров $\dfrac{U}{4r}$; сумма показаний вольтметров $1000r\,I_1 \approx 15{,}3\,U$ (при $R_x \approx 65r$ — $15{,}4\,U$).