Мостик из вольтметров и резисторов

Задача 1. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Из источника напряжения, двух одинаковых вольтметров, амперметра и четырех резисторов, сопротивление двух из которых равно R, а двух — $3R$, собрали электрическую цепь, схема которой приведена на рисунке. Показания приборов составляют: $U_1 = 0{,}5$ В, $U_2 = 3$ В, $I = 2$ мА. Найти величину R.

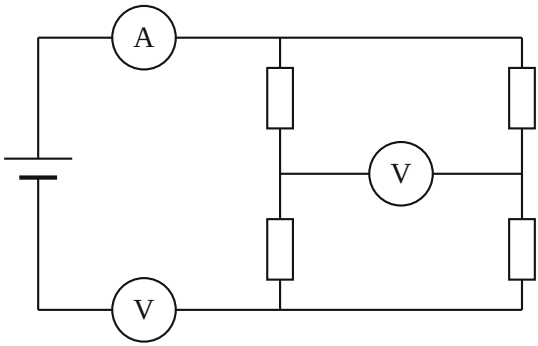


Рисунок условия: источник, амперметр и вольтметр включены последовательно с мостом из четырёх резисторов; ещё один вольтметр включён между средними точками ветвей моста

▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметры одинаковые, у каждого одно и то же сопротивление R_V, и он показывает $U = IR_V$, где I — ток через сам прибор. Значит, показания относятся как токи через вольтметры, и ток мостика находится по показаниям, без R_V. Вольтметр-мостик нельзя считать идеальным: ток через него конечный и влияет на токи в мосте. Это мостовая схема с неидеальным вольтметром: сначала выясняем, какой прибор что показывает и как расставлены резисторы, затем находим токи и из напряжения на мостике — R.

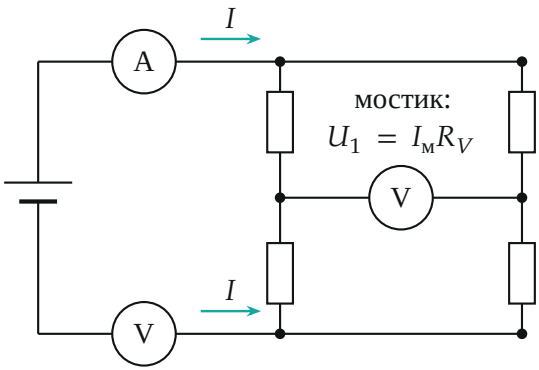
Обозначения. T и B — верхний и нижний узлы моста; M_1 и M_2 — средние точки левой и правой ветвей, между ними включён вольтметр-мостик; R_V — сопротивление каждого вольтметра; $I_м$ — ток через вольтметр-мостик.

1. Какой вольтметр что показывает. Вольтметр в цепи включён последовательно с источником, поэтому через него идёт весь ток цепи $I = 2$ мА (показание амперметра). Через вольтметр-мостик идёт только часть этого тока: в узле T ток I делится на токи верхних резисторов I_{3R} и I_R (первое правило Кирхгофа), а ток мостика равен разности токов в ветвях и потому меньше их суммы I. Показания одинаковых вольтметров пропорциональны токам, поэтому показание мостика меньше:

$U_1 = 0{,}5$ В — вольтметр-мостик, $U_2 = 3$ В — вольтметр в цепи,

$$I_\text{м} = I\,\frac{U_1}{U_2} = \frac{I}{6} \approx 0{,}33 \text{ мА}.$$

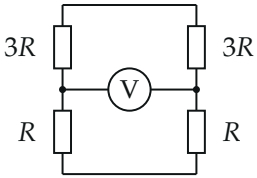
Заодно $R_V = U_2/I = 1500$ Ом, но для ответа это значение не понадобится.



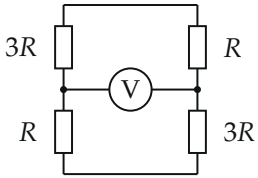
Через вольтметр в цепи идёт весь ток I, через вольтметр-мостик — только его часть $I_м < I$; показания относятся как токи: $U_1/U_2 = I_м/I$

2. Как расставлены резисторы. В каждой ветви моста по два резистора, и потенциал средней точки делит напряжение между T и B в отношении сопротивлений. Если отношения в обеих ветвях одинаковы (например, $3R, R$ слева и $3R, R$ справа, или R, R и $3R, 3R$), потенциалы M_1 и M_2 равны, тока через мостик нет и вольтметр показал бы нуль — а он показывает 0,5 В. Остаётся расстановка с разными ветвями: $3R, R$ слева

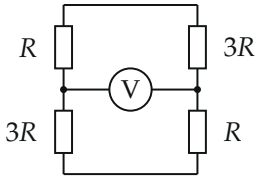
и $R, 3R$ справа (вариант б) или наоборот (вариант в). Они отличаются только направлением тока в мостике, поэтому достаточно разобрать вариант б.



а) $U = 0$
(мост уравновешен)



б) подходит



в) подходит
(зеркально б)

Варианты расстановки: а) мост уравновешен, ток мостика равен нулю; б) и в) — подходящие, зеркальные друг другу

3. Токи в мосте. В варианте б в левой ветви сверху $3R$, в правой сверху R. При равных токах на $3R$ падает большее напряжение, чем на R, поэтому потенциал M_1 ниже потенциала M_2, и ток мостика идёт от M_2 к M_1, справа налево (при противоположном направлении R вышло бы отрицательным). Пусть через верхние резисторы идут токи I_{3R} (слева) и I_R (справа); в узле T

$$I_{3R} + I_R = I.$$

В узел M_1 приходят I_{3R} и $I_м$, значит нижний резистор R слева пропускает $I_{3R} + I_м$. Из узла M_2 уходят $I_м$ и ток нижнего резистора $3R$ справа, который поэтому равен $I_R - I_м$. Напряжение на мостике $U_1 = \varphi_{M_2} - \varphi_{M_1}$ можно получить двумя путями — через верхние и через нижние резисторы:

$$U_1 = 3RI_{3R} - RI_R, \qquad U_1 = 3R\,(I_R - I_м) - R\,(I_{3R} + I_м).$$

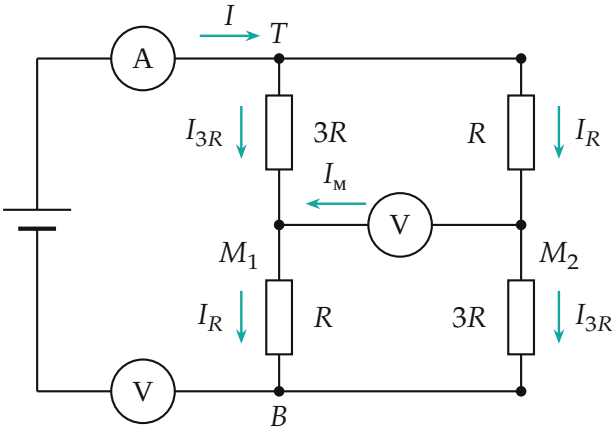
Приравняем правые части: сопротивление R сокращается, и

$$4I_{3R} = 4I_R - 4I_м \quad \Rightarrow \quad I_R - I_{3R} = I_м.$$

Вместе с $I_{3R} + I_R = I$ получаем токи верхних резисторов:

$$I_R = \frac{I + I_м}{2} = \frac{I\,(U_2 + U_1)}{2U_2} = \frac{7}{6}\text{ мА},$$
$$I_{3R} = \frac{I - I_м}{2} = \frac{I\,(U_2 - U_1)}{2U_2} = \frac{5}{6}\text{ мА}.$$

Нижний резистор R пропускает $I_{3R} + I_м = I_R$, нижний $3R$ — $I_R - I_м = I_{3R}$: оба резистора R несут один и тот же ток I_R, оба резистора $3R$ — ток I_{3R} (мост симметричен относительно поворота на 180°).



Токи в варианте б: через оба резистора R идёт I_R, через оба резистора $3R$ — I_{3R}; ток мостика $I_м = I_R - I_{3R}$ течёт справа налево

4. Сопротивление R**.** Напряжение на вольтметре-мостике — его показание:

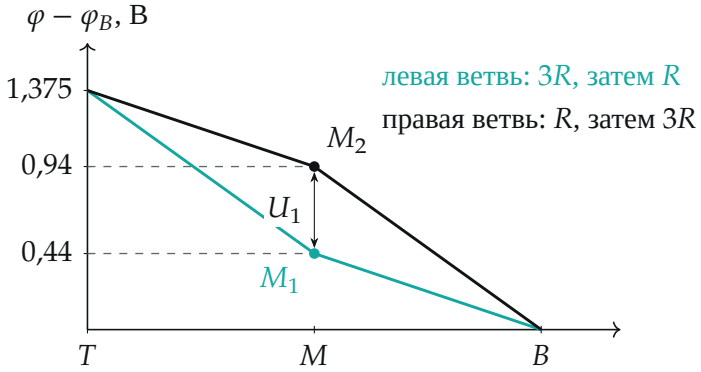
$$U_1 = 3RI_{3R} - RI_R = R\left(\frac{3(I - I_м)}{2} - \frac{I + I_м}{2}\right) = R\,(I - 2I_м).$$

Подставим $I_м = IU_1/U_2$:

$$U_1 = RI\,\frac{U_2 - 2U_1}{U_2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U_1U_2}{I\,(U_2 - 2U_1)}.$$

Числа: $R = \dfrac{0{,}5 \cdot 3}{2 \cdot 10^{-3} \cdot (3-1)}$ Ом $= 375$ Ом.

Обратите внимание: вольтметр-мостик нельзя считать идеальным. Идеальный пропускал бы нулевой ток, токи в ветвях были бы по $I/2$, и показание равнялось бы $3R \cdot \frac{I}{2} - R \cdot \frac{I}{2} = RI$, откуда вышло бы $R = U_1/I = 250$ Ом — ошибка в полтора раза. Здесь ток мостика составляет шестую часть тока цепи, и пренебрегать им нельзя.



Потенциал вдоль ветвей при $R = 375$ Ом: левая ветвь (бирюзовая) идёт сначала через $3R$, правая — сначала через R; в средних точках M_1 и M_2 потенциалы различаются на $U_1 = 0{,}5$ В, как показывает вольтметр-мостик

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{В} \cdot \text{В}}{\text{А} \cdot \text{В}} = \dfrac{\text{В}}{\text{А}} =$ Ом. Предельный случай: подставим $I_\text{м} = U_1/R_V$ в $U_1 = R\,(I - 2I_\text{м})$, получим $U_1 = \dfrac{RI}{1 + 2R/R_V}$. При $R \ll R_V$ это показание идеального вольтметра RI; здесь $R/R_V = 375/1500 = \frac{1}{4}$, множитель $\frac{1}{1{,}5}$ — ровно $250 \cdot 1{,}5 = 375$ Ом. Независимая проверка: расчёт схемы целиком методом узловых потенциалов (python) с $R = 375$ Ом, $R_V = 1500$ Ом даёт при токе 2 мА показание мостика 0,500 В, токи $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$ и $\frac{1}{3}$ мА — те же, что выше.

Ответ. $R = \dfrac{U_1 U_2}{I\,(U_2 - 2U_1)} = 375$ Ом (вольтметр-мостик показывает 0,5 В, вольтметр в цепи — 3 В; ток мостика $\frac{I}{6} \approx 0{,}33$ мА).