Блоки с ускорениями

Задача 2. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 2] В системе двух тел массой m и $3m$ и двух невесомых блоков все тела сначала удерживали в покое. В некоторый момент времени блоки начали тянуть с вертикальными ускорениями a и $2a$ (см. рисунок). Какими силами нужно действовать для этого на блоки? Нити невесомы и нерастяжимы. Все не касающиеся блоков участки нитей вертикальны.

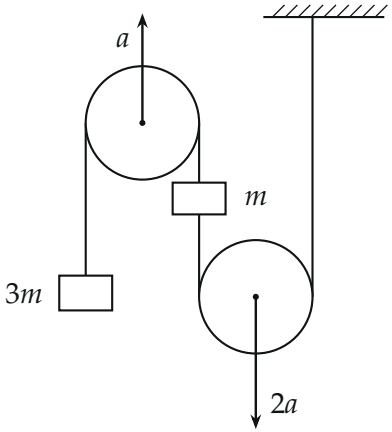


Рисунок условия: верхний блок тянут вверх с ускорением a, нижний — вниз с ускорением $2a$; нить нижнего блока одним концом привязана к телу m, другим — к потолку; нить верхнего блока соединяет тела $3m$ и m

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тела и блоки связаны нерастяжимыми нитями, поэтому ускорения тел нельзя выбирать произвольно: они однозначно определяются заданными ускорениями блоков. Сначала по условиям связи найдём ускорения тел, затем запишем второй закон Ньютона для каждого тела и найдём натяжения нитей. Блоки невесомы, поэтому сила, приложенная к блоку, уравновешена силами нитей — она равна их сумме. Задача на систему тел с кинематической связью (подвижные блоки).

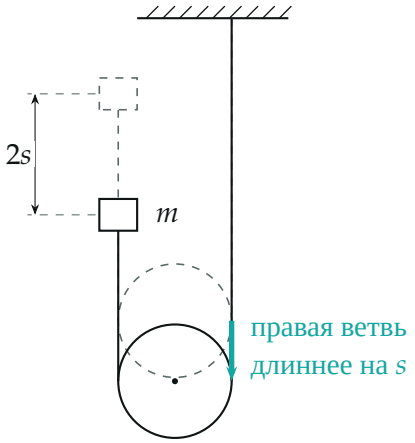
Обозначения. Ось y направлена вверх. y_1, y_2 — координаты центров верхнего и нижнего блоков, y_m и y_3 — координаты тел m и $3m$, y_0 —

координата потолка. T_1 — натяжение нити, перекинутой через верхний блок (она связывает $3m$ и m), T_2 — натяжение нити, идущей от тела m вокруг нижнего блока к потолку. Блоки и нити невесомы, трения нет, поэтому натяжение вдоль каждой нити одно и то же. F_a и F_{2a} — искомые силы на верхний и нижний блоки. По условию $\ddot{y}_1 = a$, $\ddot{y}_2 = -2a$.

1. Нижняя нить: ускорение тела m. Длина нити постоянна. Она состоит из участка от тела m до нижнего блока (длина $y_m - y_2$), дуги по блоку (длина постоянна) и участка от блока до потолка (длина $y_0 - y_2$ — он тоже вертикален):

$$(y_m - y_2) + (y_0 - y_2) + \text{const} = L_2 \quad \Rightarrow \quad y_m = 2y_2 + \text{const}.$$

Продифференцируем дважды (связь верна в любой момент): $\ddot{y}_m = 2\ddot{y}_2 = -4a$. Тело m движется вниз с ускорением $4a$. Наглядно: нижний блок опустился на s — участок нити от блока до потолка стал длиннее на s. Длина нити не меняется, значит участок от блока до тела m стал короче на s: тело сблизилось с блоком на s, а сам блок ушёл вниз на s, поэтому тело m опустилось на $2s$.

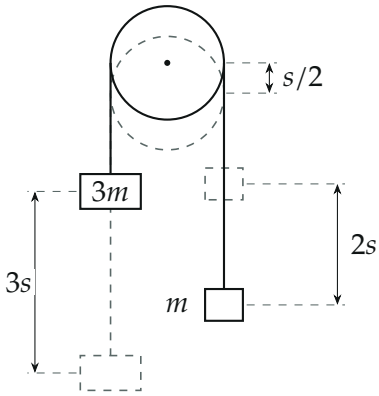


Нижняя нить за малое время τ от начала движения (серое — до, чёрное — после): блок опустился на $s = \frac{1}{2} \cdot 2a\tau^2$, правая ветвь удлинилась на s, значит левая укоротилась на s, и тело m опустилось на $2s$

2. Верхняя нить: ускорение тела $3m$. Верхняя нить состоит из двух вертикальных участков (до $3m$ и до m) и дуги по блоку:

$$(y_1 - y_3) + (y_1 - y_m) + \text{const} = L_1 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 2y_1 - y_m + \text{const}.$$

Дифференцируем дважды: $\ddot{y}_3 = 2\ddot{y}_1 - \ddot{y}_m = 2a - (-4a) = 6a$. Тело $3m$ поднимается с ускорением $6a$. Наглядно (рисунок): блоки стартуют из состояния покоя, поэтому их малые перемещения пропорциональны ускорениям; верхний блок поднимается на $s/2$, тело m уходит вниз на $2s$, и $3m$ поднимается на $2 \cdot \frac{s}{2} + 2s = 3s$.



Верхняя нить за то же время: блок поднялся на $s/2$, тело m опустилось на $2s$, тело $3m$ поднялось на $3s$. Ускорения тел относятся как перемещения: $6a : 4a : a$

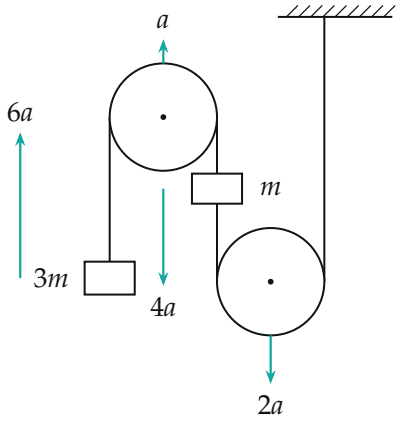
3. Второй закон Ньютона для тела $3m$. На него действуют сила тяжести $3mg$ вниз и сила натяжения верхней нити T_1 вверх. В проекции на ось y (ось вверх — по ускорению тела):

$$3m \cdot 6a = T_1 - 3mg \quad \Rightarrow \quad T_1 = 3m\,(6a + g).$$

4. Второй закон Ньютона для тела m. На него действуют сила тяжести mg вниз, натяжение верхней нити T_1 вверх (нить идёт к верхнему блоку) и натяжение нижней нити T_2 вниз (нить идёт к нижнему блоку).

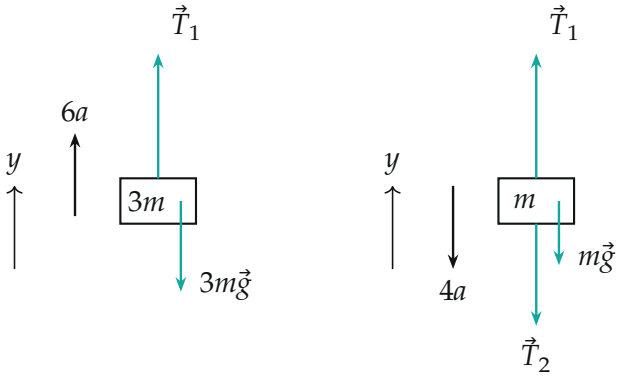
Проекция на ось y с ускорением $-4a$:

$$m\cdot(-4a) = T_1 - mg - T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 - mg + 4ma = 2m\,(11a + g).$$



Итог кинематики, с которым записаны законы Ньютона в пунктах 3 и 4: ускорения блоков (a и $2a$) и тел ($6a$ вверх, $4a$ вниз); длины стрелок пропорциональны ускорениям

Оба натяжения положительны при любом $a \geqslant 0$, значит нити остаются натянутыми и выбранная кинематика верна.



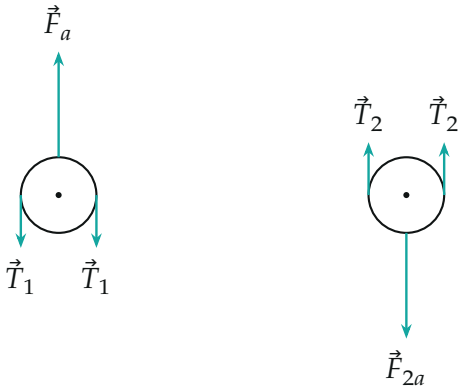
Силы на тела $3m$ (слева) и m (справа): стрелки — ускорения тел; тело m ускоряется вниз, потому что $mg + T_2 > T_1$ (длины стрелок качественные)

5. Силы, действующие на блоки. Блок невесом: сумма сил на него равна $0 \cdot \ddot{y} = 0$ при любом ускорении (иначе при конечной силе ускорение было бы бесконечным). На верхний блок нить действует двумя участками — каждый тянет его вниз с силой T_1, а искомая сила F_a направлена вверх:

$$F_a - 2T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_a = 2T_1 = 6m\,(6a + g).$$

На нижний блок нить действует двумя участками — участок к телу m и участок к потолку — каждый тянет его вверх с силой T_2, а F_{2a} направлена вниз:

$$2T_2 - F_{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{2a} = 2T_2 = 4m\,(11a + g).$$



Силы на невесомые блоки: слева — верхний (две ветви нити тянут вниз, сила $\vec{F}_a$ вверх), справа — нижний (две ветви тянут вверх, сила $\vec{F}_{2a}$ вниз); сумма сил равна нулю

Обратите внимание: ускорение тела не равно ускорению блока, к которому подвешена нить: подвижный блок удваивает перемещение (ускорения тел $4a$ и $6a$ при блоках $2a$ и a). Если считать, что тела движутся с ускорениями блоков, получатся неверные натяжения.

Проверка. Размерность: $m(a + g)$ — сила. Предел покоя $a \to 0$: $F_a = 6mg$ и $F_{2a} = 4mg$ — как для неподвижной системы ($T_1 = 3mg$ держит

$3m$, $T_2 = T_1 - mg = 2mg$ держит m). Второй способ — энергия. В первый момент скорости блоков $a\tau$ и $2a\tau$, мощность сил на блоках

$$P = F_a \cdot a\tau + F_{2a} \cdot 2a\tau = \left(124\,ma^2 + 14\,mga\right)\tau.$$

Рост кинетической энергии тел $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}m(4a\tau)^2 + \frac{1}{2}\cdot 3m(6a\tau)^2\right) = 124\,ma^2\tau$, рост потенциальной ($m$ опускается на $2a\tau^2$, $3m$ поднимается на $3a\tau^2$) $\frac{d}{d\tau}\left(-mg\cdot 2a\tau^2 + 3mg\cdot 3a\tau^2\right) = 14\,mga\tau$. Сумма равна P — ответ сходится. Направления: F_a — вверх, F_{2a} — вниз, то есть вдоль ускорений блоков.

Ответ. Верхний блок надо тянуть вверх с силой $F_a = 6m\,(6a + g)$; нижний блок — вниз с силой $F_{2a} = 4m\,(11a + g)$.