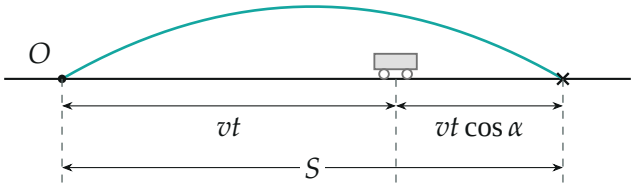
Бросок с тележки

Задача 3. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 3] С движущейся со скоростью v тележки с такой же скоростью v под некоторым углом к горизонту бросают тело. Чему равна максимально возможная дальность полета тела (расстояние от точки бросания до точки падения тела на землю)? Под каким углом к горизонту (относительно тележки) нужно бросить тело, чтобы дальность его полета была максимальной? Под каким углом к горизонту (относительно земли) начнет в этом случае свое движение тело? Силой сопротивления воздуха пренебречь. Считать, что тележка очень маленькая, и бросок производится практически с поверхности земли.

▲ **Решение. Что происходит.** Тело летит по параболе в системе земли, и дальность равна произведению горизонтальной скорости на время полёта. Время полёта задаёт только вертикальная составляющая начальной скорости, а горизонтальная складывается из скорости тележки и горизонтальной части скорости броска. Крутой бросок даёт долгий полёт, но мало горизонтальной скорости, пологий — наоборот, поэтому у дальности есть максимум по углу броска. Задача на сложение скоростей (переход между двумя системами отсчёта) и на поиск максимума функции угла.



Поясняющий рисунок: траектория тела в системе земли. Серый прямоугольник — тележка в момент падения тела (в момент броска она в точке O); дальность S складывается из пути тележки vt и смещения тела относительно неё vt $\cos\alpha$

Обозначения. $\vec{v}$ — скорость тележки относительно земли; $\vec{v}_1$ — скорость тела сразу после броска относительно тележки, $|\vec{v}_1| = v$; α — угол

между $\vec{v}_1$ и горизонтом; $\vec{u}$ — начальная скорость тела относительно земли, β — её угол с горизонтом; t — время полёта; S — дальность. Ось x — по земле вдоль движения тележки, ось y — вверх, начало — точка бросания.

1. Куда бросать. Скорость тела относительно земли равна сумме скорости тележки и скорости тела относительно тележки (закон сложения скоростей):

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}_1.$$

Вертикальная составляющая $u_y = v\sin\alpha$ от движения тележки не зависит, поэтому и время полёта не зависит от направления броска в горизонтальной плоскости. Горизонтальная составляющая $\vec{u}$ — сумма двух горизонтальных векторов: $\vec{v}$ длиной v и горизонтальной части $\vec{v}_1$ длиной $v\cos\alpha$. Сумма двух векторов заданной длины наибольшая, когда они направлены одинаково. Значит, при любом α дальше всего тело улетит, если бросить его вперёд, в вертикальной плоскости, в которой едет тележка. Тогда

$$u_x = v + v\cos\alpha, \qquad u_y = v\sin\alpha.$$

2. Время полёта. Вертикальное движение — с ускорением $-g$ (сопротивления нет), поэтому

$$y(t) = v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тележка маленькая, бросок — с земли, поэтому тело падает при $y = 0$ и $t \neq 0$:

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

3. Дальность. Вдоль оси x сил нет, движение равномерное с u_x:

$$S = u_x t = vt + vt\cos\alpha = \frac{2v^2}{g}\,\sin\alpha\,(1+\cos\alpha).$$

Первое слагаемое — путь тележки за время полёта, второе — смещение

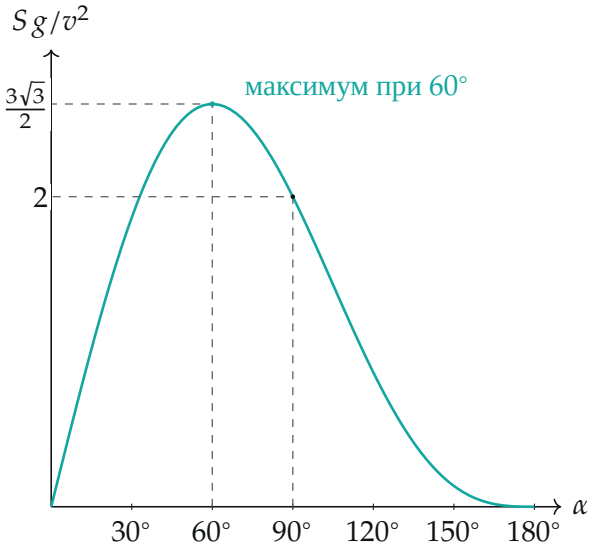
тела относительно неё (рисунок выше). Формула верна и для $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (бросок назад относительно тележки): пока $\cos\alpha > -1$, тело всё равно уносится вперёд.

4. Максимум дальности. Качественно: при $\alpha \to 0$ тело не успевает взлететь, $S \to 0$; при $\alpha \to 180^\circ$ бросок назад гасит горизонтальную скорость тележки, $u_x \to 0$ и снова $S \to 0$. Между ними — максимум (график). Найдём его: $S \propto f(\alpha) = \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)$, и в максимуме производная равна нулю:

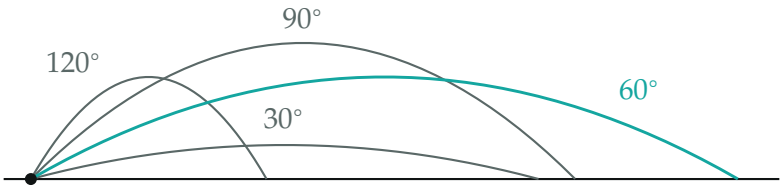
$$f'(\alpha) = \cos\alpha\,(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = \\ = (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) = 0.$$

Корень $\cos\alpha = -1$ (угол 180°) — это нулевая дальность. Остаётся $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то есть $\alpha = 60^\circ$; при меньших углах $f' > 0$, при больших $f' < 0$, так что это максимум. Подставим $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $1+\cos 60^\circ = \frac{3}{2}$:

$$S_{\max} = \frac{2v^2}{g}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}\,v^2}{2g} \approx 2{,}6\,\frac{v^2}{g}.$$



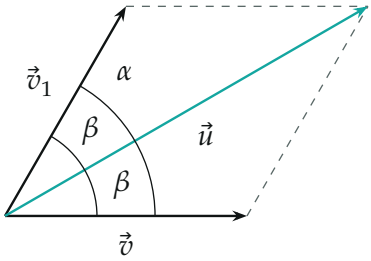
Дальность $S = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha(1+\cos\alpha)$ в зависимости от угла броска относительно тележки; бросок под 90° даёт $2v^2/g$



Траектории при разных α (в единицах v^2/g, масштаб по осям одинаков): наибольшую дальность даёт 60°

5. Угол относительно земли. Скорость относительно земли — диагональ ромба со сторонами v (рисунок ниже). Диагональ ромба делит его угол пополам, поэтому

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = 30°.$$



Сложение скоростей в момент броска при $\alpha = 60°$: $|\vec{v}| = |\vec{v}_1|$, параллелограмм — ромб, диагональ $\vec{u}$ делит угол α пополам

Проверим через составляющие: $u_x = \frac{3}{2}v$, $u_y = \frac{\sqrt{3}}{2}v$, откуда $\tan\beta = u_y/u_x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta = 30°$, а модуль $u = \sqrt{3}\,v$.

6. Тот же максимум вторым способом (в системе земли). Тело брошено с земли со скоростью $u = 2v\cos\frac{\alpha}{2} = 2v\cos\beta$ под углом β, поэтому

$$S = \frac{u^2\sin 2\beta}{g} = \frac{8v^2}{g}\sin\beta\cos^3\beta.$$

Производная по β равна нулю при $\cos^2\beta = 3\sin^2\beta$, то есть $\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta = 30°$, $\alpha = 2\beta = 60°$, и $S = \frac{8v^2}{g} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{2g}$ — тот же ответ.

Обратите внимание. Угол α — относительно тележки, а в системе земли тело стартует вдвое положе, под 30°: чем быстрее едет тележка, тем более полого тело вылетает относительно земли. Знакомые 45° — максимум дальности только с неподвижной точки: при $v_{\text{тележки}} = 0$ формула $S = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$ даёт 45°.

Проверка. Размерность: v^2/g — метры. Предел: тележка стоит. Тогда $S = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha$, максимум v^2/g при 45° — известный результат; у движущейся тележки дальность в 2,6 раза больше, потому что к полёту добавляется перемещение самой тележки. Численно: $\alpha = 45°$ даёт $2{,}41\,v^2/g$, $\alpha = 60°$ — $2{,}60\,v^2/g$, $\alpha = 75°$ — $2{,}43\,v^2/g$, и 60° действительно лучше соседних. К моменту падения тележка проехала $vt = \sqrt{3}\,v^2/g \approx 1{,}73\,v^2/g$, и тело упало впереди неё ещё на $0{,}87\,v^2/g$.

Ответ. $S_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}\,v^2}{2g} \approx 2{,}6\,\dfrac{v^2}{g}$; 1) относительно тележки — под углом 60° к горизонту; 2) относительно земли тело начинает движение под углом 30° к горизонту.