Цикл с адиабатой и изобарой

Задача 4. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 4] С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, график которого в координатах «давление-объем» приведен на рисунке. Известно, что процесс 1-2 — адиабатический, процесс 2-3 — изобарический, график процесса 3-1 получен отражением графика 1-2 относительно вертикальной прямой, проходящей через точку 1, и давление газа изменяется в два раза в течение всего процесса. Найти термодинамический КПД процесса. Указание. Давление и объем воздуха в адиабатическом процессе связаны соотношением $pV^{5/3} = \text{const}$.

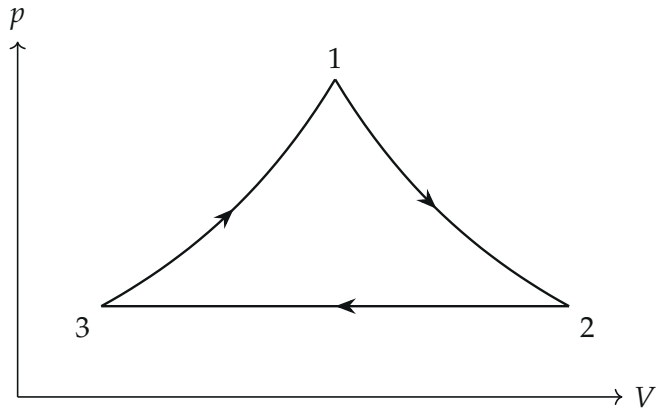


Рисунок условия: цикл 1–2–3 в осях p–V (направление обхода — по стрелкам); участки 1–2 и 3–1 зеркальны друг другу относительно вертикали через точку 1

▲ **Решение. Что происходит.** Газ расширяется по адиабате 1–2 (теплообмена нет), сжимается при постоянном давлении 2–3 (газ отдаёт теплоту) и возвращается по кривой 3–1, на которой растут и объём, и давление: здесь газ нагревается и получает теплоту — всю, что есть в цикле. КПД равен отношению работы цикла к полученной теплоте, $\eta = W/Q_{\text{получ}}$. Выразим всё через давление p в точке 2 и объём V в точке 1 и один безразмерный множитель из уравнения адиабаты. Это цикл с заданными процессами: работа — площадь, теплота — по первому закону термодинамики на каждом участке.

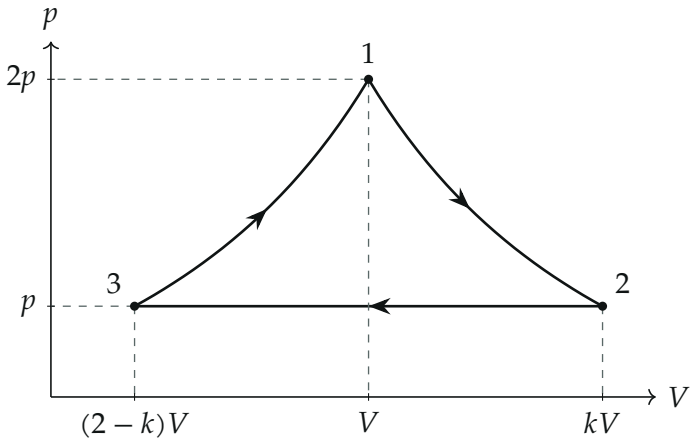
Обозначения. $p = p_2 = p_3$ — давление на изобаре, $V = V_1$ — объём в точке 1, $k = 2^{3/5} \approx 1{,}516$. Для одноатомного газа внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}pV$ (так как $U = \frac{3}{2}\nu RT$ и $pV = \nu RT$), теплоёмкость при постоянном давлении даёт $Q = \frac{5}{2}p\Delta V$.

1. Состояния газа. Давление меняется вдвое за цикл: $p_1 = 2p$ (давление максимально в точке 1), $V_1 = V$. Адиабата 1–2: $p_1 V_1^{5/3} = p_2 V_2^{5/3}$, то есть $2pV^{5/3} = pV_2^{5/3}$, откуда

$$V_2 = 2^{3/5}V = kV.$$

Кривая 3–1 — отражение кривой 1–2 относительно вертикали $V = V_1$, поэтому точка 3 лежит на том же расстоянии от этой вертикали, что и точка 2, а давление в ней то же, $p_3 = p_2 = p$:

$$V_3 = 2V_1 - V_2 = (2-k)V.$$



Состояния газа: $p_1 = 2p$, $V_1 = V$; $p_2 = p_3 = p$; $V_2 = kV$, $V_3 = (2-k)V$, $k = 2^{3/5}$

2. Теплота и работа на каждом участке (первое начало $Q = \Delta U + A$, A — работа газа).

Адиабата 1–2. Теплообмена нет: $Q_{12} = 0$. Работа газа равна убыли

внутренней энергии:

$$A_{12} = -\Delta U_{12} = \tfrac{3}{2}\,(p_1V_1 - p_2V_2) = \tfrac{3}{2}\,pV\,(2-k) > 0.$$

Изобара 2–3. Объём уменьшается на $V_2 - V_3 = 2(k-1)V$, газ сжимают, и его работа отрицательна:

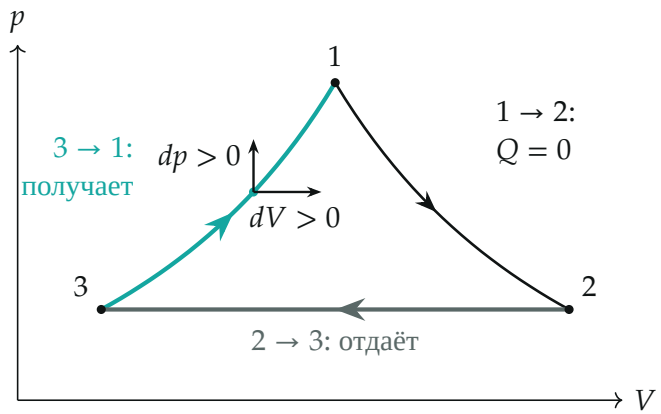
$$A_{23} = p\,(V_3 - V_2) = -2(k-1)\,pV,$$
$$Q_{23} = \tfrac{3}{2}\,p\,(V_3 - V_2) + A_{23} = \tfrac{5}{2}\,p\,(V_3 - V_2) = -5(k-1)\,pV < 0.$$

Газ отдаёт теплоту.

Участок 3–1. Отражение относительно вертикали сохраняет площади, поэтому площадь под кривой 3–1 равна площади под кривой 1–2: $A_{31} = A_{12} = \tfrac{3}{2}\,pV\,(2-k)$. Внутренняя энергия растёт:

$$\Delta U_{31} = \tfrac{3}{2}\,(p_1V_1 - p_3V_3) = \tfrac{3}{2}\,pV\,(2-(2-k)) = \tfrac{3}{2}\,k\,pV,$$
$$Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31} = \tfrac{3}{2}\,pV\,(k+(2-k)) = 3\,pV.$$

Теплоту газ получает на всём участке 3–1, а не на его части: для малого шага $dQ = dU + p\,dV = \tfrac{5}{2}\,p\,dV + \tfrac{3}{2}\,V\,dp$, и на 3–1 объём и давление растут одновременно ($dV > 0$, $dp > 0$), поэтому $dQ > 0$ в каждой точке. Значит, вся теплота, полученная в цикле, $Q_{\text{получ}} = Q_{31} = 3\,pV$, а отдана теплота $|Q_{23}|$.



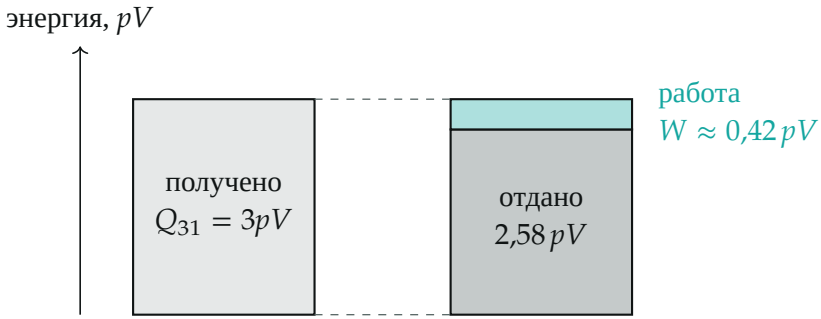
Теплообмен на участках цикла: на 3–1 растут и V, и p, поэтому $dQ = \frac{5}{2}p\,dV + \frac{3}{2}V\,dp > 0$ — газ получает теплоту; на 1–2 теплообмена нет; на 2–3 газ отдаёт теплоту

3. Работа цикла и КПД. Работа цикла — сумма работ на участках:

$$W = A_{12} + A_{23} + A_{31} = 3pV\,(2-k) - 2\,(k-1)\,pV = (8-5k)\,pV.$$

Тот же результат из баланса энергии: $W = Q_{\text{получ}} - |Q_{\text{отд}}| = 3pV - 5(k-1)\,pV = (8-5k)\,pV$. Тогда

$$\eta = \frac{W}{Q_{31}} = \frac{(8-5k)\,pV}{3pV} = \frac{8-5\cdot 2^{3/5}}{3} \approx \frac{8-7{,}579}{3} \approx 0{,}14.$$



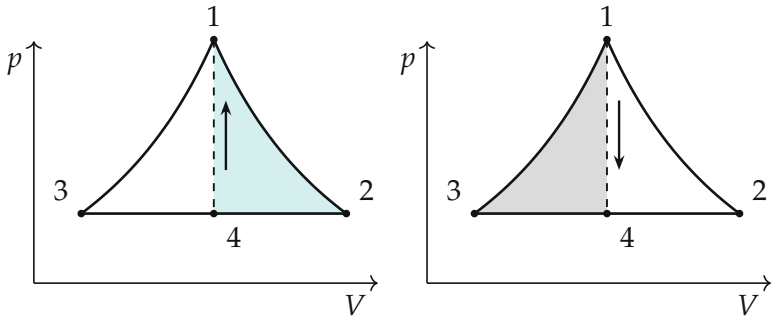
Энергетический баланс цикла в единицах pV: полученная теплота 3 делится на работу 0,42 и отданную теплоту 2,58; $\eta = 0{,}42/3 \approx 0{,}14$

4. Тот же ответ вторым способом. Проведём изохору 1–4 до пересечения с изобарой (точка 4: $V_4 = V$, $p_4 = p$). Она делит цикл на две половины, которые зеркальны друг другу. Правая половина — цикл 1–2–4: на изохоре 4–1 газ получает $Q_{41} = \frac{3}{2}(p_1 - p)V = \frac{3}{2}pV$, на изобаре 2–4 — отдаёт $|Q_{24}| = \frac{5}{2}p\,(V_2 - V) = \frac{5}{2}\,(k-1)\,pV$, адиабата 1–2 теплоты не даёт:

$$\eta_{1/2} = 1 - \frac{|Q_{24}|}{Q_{41}} = 1 - \frac{5\,(k-1)}{3} = \frac{8-5k}{3}.$$

В левой половине (цикл 4–3–1) та же изохора проходится в обратную сторону, и в сумме двух половин она сокращается — остаётся исход-

ный цикл. Работа цикла вдвое больше работы половины ($W = 2W_{1/2}$, площади зеркальны), и полученная теплота тоже вдвое больше: $Q_{31} = 3pV = 2Q_{41}$ (это совпадение мы проверили прямым счётом в пункте 2). Поэтому КПД всего цикла равен КПД половины: $\eta = \dfrac{8-5k}{3}$.



Деление цикла изохорой 1–4 на две зеркальные половины: правая (бирюзовая) — цикл 1–2–4, левая (серая) — цикл 4–3–1; стрелка — направление обхода изохоры

Обратите внимание: в исходном цикле нет изохоры, и теплоту нельзя брать как ΔU на каком-то одном участке по аналогии с половиной цикла. Вся полученная теплота Q_{31} вычисляется через первое начало на кривой 3–1.

Проверка. КПД — безразмерное число, $0 < \eta < 1$. Предел: если давления в точках 1 и 2 почти равны ($p_1 = \rho p$, $\rho \to 1$), то $k = \rho^{3/5} \approx 1 + \frac{3}{5}(\rho - 1)$, и по тем же формулам $\eta = 1 - \dfrac{5(k-1)}{3(\rho-1)} \to 1 - \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3}{5} = 0$: цикл вырождается в линию и совершает нулевую работу. Численная проверка (python): $\oint p\,dV = 0{,}4214\,pV$, $\int_{3\to1} dQ = 3{,}000\,pV$, их отношение 0,1405.

Ответ. $\eta = \dfrac{8 - 5\cdot 2^{3/5}}{3} \approx 0{,}14$.