Заряд над диполем

Задача 5. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Точечный положительный заряд q удерживают на расстоянии l от двух точечных зарядов $+e$ и $-e$ ($e > 0$), закрепленных на очень малом расстоянии d друг от друга. Направление на заряд q из середины отрезка, соединяющего заряды $+e$ и $-e$, перпендикулярно этому отрезку (см. рисунок). В некоторый момент времени заряд q отпускают. На каком расстоянии от середины отрезка, соединяющего заряды $+e$ и $-e$, заряд q пересечет прямую, на которой лежат заряды $+e$ и $-e$ (прямая AB на рисунке)? Какую скорость он будет иметь в этот момент? Какое ускорение? Масса заряда m. Указание. При решении может понадобиться приближенная формула $\dfrac{1}{1-\delta} \approx 1 + \delta$, справедливая для малых δ.

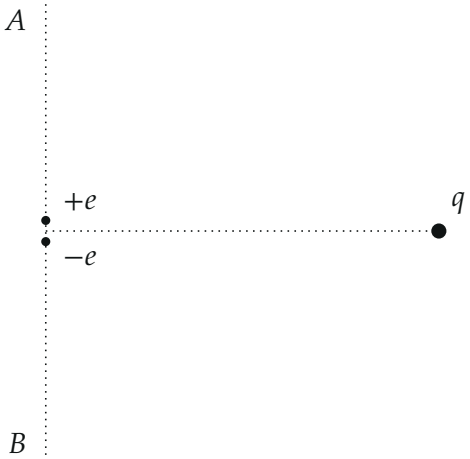


Рисунок условия: заряды $+e$ и $-e$ закреплены на прямой AB на очень малом расстоянии друг от друга, заряд q находится на перпендикуляре к AB, проведённом через середину отрезка между зарядами

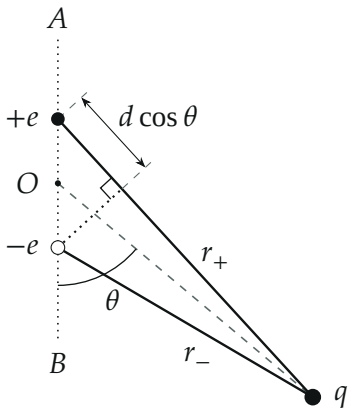
▲ **Решение.** **Что происходит.** Заряд $q > 0$ отталкивается от $+e$ и притягивается к $-e$. На перпендикуляре силы почти компенсируются, остаётся малая сила, направленная к отрицательному заряду, то есть вдоль AB вниз. Заряд трогается с места и разгоняется. Главная идея: записать

потенциальную энергию заряда в поле диполя (двух близких зарядов), найти по закону сохранения энергии скорость в произвольном положении, а вторым законом Ньютона вдоль радиуса проверить, что при расстоянии l до середины диполя заряд может двигаться по окружности. Тогда пересечение с AB найдётся сразу. Класс задачи: движение заряда в поле диполя — сохранение энергии плюс проверка траектории.

Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; O — середина отрезка между зарядами; r — расстояние от O до заряда q; θ — угол между направлением от O к q и направлением от O к заряду $-e$ (вдоль AB вниз). В начале $r = l$, $\theta = 90°$. Так как $d \ll l$, считаем $d \ll r$ в любой точке движения.

1. Потенциальная энергия заряда в поле диполя. Электростатическое поле потенциально, поэтому энергия взаимодействия q с зарядами есть сумма $U = \dfrac{keq}{r_+} - \dfrac{keq}{r_-}$, где $r_\pm$ — расстояния от q до $\pm e$. По теореме косинусов для треугольника O, q, заряд $+e$ (угол при O равен $180° - \theta$) $r_+^2 = r^2 + rd\cos\theta + \frac{d^2}{4}$, и аналогично $r_-^2 = r^2 - rd\cos\theta + \frac{d^2}{4}$. При $d \ll r$ слагаемым $d^2/4$ можно пренебречь:

$$r_\pm \approx r \pm \frac{d}{2}\cos\theta = r\,(1 \pm \delta), \qquad \delta = \frac{d\cos\theta}{2r} \ll 1.$$



Расстояния от заряда q до зарядов диполя (размер диполя для наглядности

увеличен; пунктир — расстояние r от середины диполя): при $d \ll r$ они различаются на $d\cos\theta$; угол θ отсчитывается от направления на $-e$

Подставим и применим приближённую формулу из указания:

$$U = \frac{keq}{r}\left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{1-\delta}\right) \approx \frac{keq}{r}\left((1-\delta) - (1+\delta)\right) = \\ = -\frac{2keq\,\delta}{r} = -\frac{keqd\cos\theta}{r^2}.$$

Знак: при $\theta < 90°$ заряд ближе к отрицательному заряду, притяжение преобладает, энергия отрицательна; на перпендикуляре ($\theta = 90°$) $U = 0$.

2. Силы на заряд. Сила — минус градиент энергии. Составляющая вдоль радиуса и составляющая вдоль окружности (в сторону роста θ):

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{2keqd\cos\theta}{r^3}, \qquad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{keqd\sin\theta}{r^3}.$$

Радиальная составляющая совпадает с результатом прямого сложения кулоновских сил (при $\theta = 0$ он выполнен в пункте 6). Обе составляющие отрицательны при $0 < \theta < 90°$: F_r направлена к O, F_θ — в сторону убывания θ, то есть к заряду $-e$. В начальный момент ($\theta = 90°$) $F_r = 0$, и сила направлена по касательной к окружности радиуса l: заряд начинает двигаться по этой окружности.

3. Скорость в произвольном положении. Поле потенциально, поэтому механическая энергия заряда сохраняется. В начале скорость равна нулю и $U = 0$, значит в любой точке

$$\frac{mv^2}{2} + U = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2keqd\cos\theta}{m\,r^2}.$$

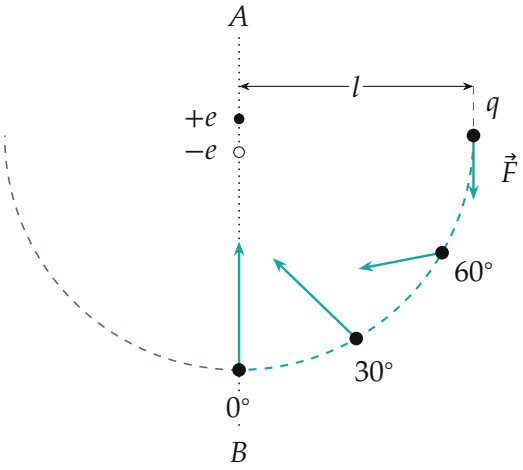
Одного этого уравнения недостаточно: оно связывает v с r и θ, а как меняется r, пока неизвестно.

4. Траектория: окружность радиуса l. Предположим, что заряд движется по окружности $r = l$. Тогда вдоль радиуса его ускорение — центростремительное, v^2/l, и его создаёт радиальная составляющая силы

(второй закон Ньютона в проекции на радиус, к O):

$$\frac{mv^2}{l} = -F_r = \frac{2keqd\cos\theta}{l^3} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2keqd\cos\theta}{ml^2}.$$

Это совпадает со скоростью из закона сохранения энергии при $r = l$ для любого угла θ. Значит, оба закона одновременно выполнены при $r = l$, и движение по окружности возможно в каждой точке (рисунок с силами ниже, графики — после пункта 5). Уравнения движения с заданными положением и нулевой скоростью имеют единственное решение, поэтому заряд действительно движется по дуге окружности радиуса l с центром в O: из точки $\theta = 90°$ вниз до прямой AB.



Заряд движется по дуге окружности радиуса l с центром в середине диполя (бирюзовые стрелки — полная сила в четырёх точках: в начале она направлена по касательной, внизу — к O); серым — продолжение дуги за прямой AB

5. Расстояние, скорость и ускорение в момент пересечения. Заряд пересекает прямую AB при $\theta = 0$, ниже диполя, на расстоянии

$$r = l$$

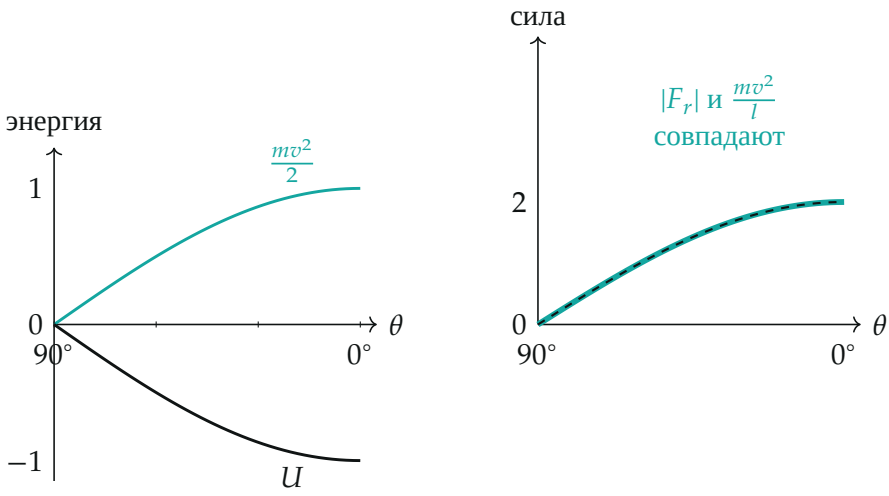
от середины отрезка. Скорость в этот момент:

$$v = \sqrt{\frac{2keqd}{m\,l^2}}.$$

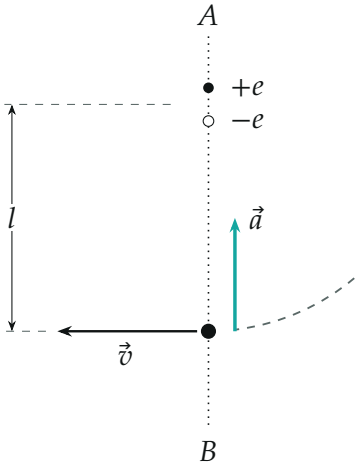
При $\theta = 0$ касательная составляющая $F_\theta = 0$ (так как $\sin 0 = 0$), сила направлена по радиусу к O, и ускорение центростремительное:

$$a = \frac{v^2}{l} = \frac{2keqd}{m\,l^3},$$

направлено к середине диполя (по AB вверх). Скорость в этот момент направлена по касательной к окружности, то есть перпендикулярно AB.



Слева: по мере движения кинетическая энергия растёт, потенциальная убывает, сумма равна нулю (единицы $keqd/l^2$). Справа: радиальная составляющая силы и mv^2/l совпадают при всех θ (единицы $keqd/l^3$) — условие движения по окружности выполнено



Момент пересечения прямой AB: заряд на расстоянии l ниже середины диполя; скорость $\vec{v}$ перпендикулярна AB, ускорение $\vec{a}$ направлено к середине диполя

6. Ускорение вторым способом. В точке на оси диполя поле двух зарядов находится прямо: ближний заряд $-e$ притягивает на расстоянии $l - \frac{d}{2}$, дальний $+e$ отталкивает на расстоянии $l + \frac{d}{2}$ — обе силы направлены вдоль AB, ближняя сильнее. По приближённой формуле $\frac{1}{(1\mp\delta)^2} \approx 1 \pm 2\delta$ при $\delta = \frac{d}{2l}$:

$$ma = keq\left(\frac{1}{(l-d/2)^2} - \frac{1}{(l+d/2)^2}\right) \approx$$
$$\approx \frac{keq}{l^2}\left(\left(1+\frac{d}{l}\right) - \left(1-\frac{d}{l}\right)\right) = \frac{2keqd}{l^3}.$$

Тот же результат — без предположения о траектории.

Обратите внимание: расстояние до середины диполя остаётся равным l потому, что сила и скорость согласованы именно так, как показано в пункте 4; это не очевидно заранее — по одному закону сохранения энергии ($v^2 \propto \cos\theta/r^2$) расстояние r найти нельзя. Также скорость при пересечении перпендикулярна AB: заряд проскакивает прямую, а не скользит вдоль неё.

Проверка. Размерность: keq/l — энергия, d/l безразмерно, поэтому

$\frac{2keqd}{ml^2}$ — квадрат скорости, а $\frac{2keqd}{ml^3}$ — ускорение. Предел: $d \to 0$ или $e \to 0$ даёт $v \to 0$ и $a \to 0$: без диполя заряд остаётся на месте. Независимая проверка: численное интегрирование движения заряда в поле двух зарядов с $d/l = 10^{-3}$ (python, $k = e = q = m = l = 1$): расстояние до середины диполя за всё время не отличается от l больше чем на 10^{-7}, при пересечении AB скорость 0,0447214 (формула 0,0447214), ускорение 0,0020000 (формула 0,0020000), направлено вверх.

Ответ. Заряд пересечёт прямую AB на расстоянии l от середины отрезка между зарядами (по дуге окружности радиуса l); его скорость в этот момент $v = \sqrt{\frac{2keqd}{ml^2}}$, ускорение $a = \frac{v^2}{l} = \frac{2keqd}{ml^3}$ и направлено к середине отрезка ($k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$).