Бусинки на проволоке

Задача 1. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Длинная проволока изогнута и расположена в пространстве так, что один её конец наклонён под углом α к горизонту, второй — горизонтален (см. рис.). На наклонный участок проволоки надеты две маленькие бусинки массой $2m$ и m (см. рис.). Расстояние от бусинок до изгиба проволоки — l и $3l$. Бусинки одновременно отпускают, и они начинают двигаться без начальной скорости. Через некоторое время бусинки сталкиваются, и происходит абсолютно неупругое столкновение. Найти количество теплоты, выделившееся при столкновении. Трение отсутствует.

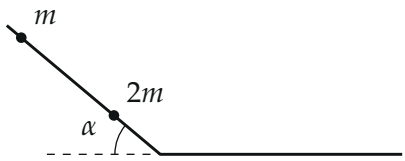


Рисунок к условию. У организаторов рисунок не в масштабе; здесь расстояния l и $3l$ до изгиба взяты по условию, состав рисунка тот же

▲ **Решение. Что происходит.** Бусинки отпускают одновременно, и на наклонном участке у них одинаковое ускорение (от массы оно не зависит), поэтому расстояние между ними всё время остаётся равным $2l$ и верхняя нижнюю не догоняет. На горизонтальном участке ускорения нет, скорости постоянны. Верхняя бусинка выезжает на него позже, но спускалась с большей высоты, а значит, быстрее — и догонит нижнюю уже на горизонтали. Потом они слипаются. Это абсолютно неупругий удар: импульс сохраняется, механическая энергия — нет, и её убыль равна выделившейся теплоте. План: скорости перед ударом (энергия при спуске) → скорость после удара (импульс) → теплота (энергия).

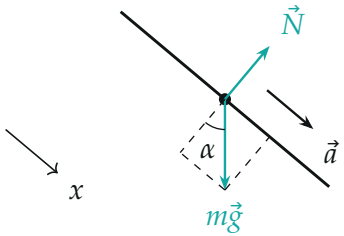
Обозначения. $2m$ — нижняя бусинка (расстояние l от изгиба), m — верхняя ($3l$). v_1 и v_2 — скорости нижней и верхней у изгиба, v — скорость слипшихся бусинок, Q — теплота. Ось x — вдоль горизонтального участка вправо; для краткости $u = gl\sin\alpha$.

1. Движение по наклонному участку. Запишем второй закон Ньютона для бусинки массой m_0 в проекции на ось вдоль проволоки (вниз по

склону). Проволока гладкая, её сила реакции $\vec{N}$ перпендикулярна проволоке и в эту проекцию не входит. Остаётся составляющая силы тяжести:

$$m_0 a = m_0 g \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\alpha.$$

Ускорение не зависит от массы: у обеих бусинок оно одно и то же. Начальные скорости нулевые и одинаковые, поэтому и скорости, и пройденные пути на склоне у них в любой момент равны, а расстояние между бусинками остаётся $2l$.



Бусинка на гладкой наклонной проволоке: сила реакции перпендикулярна проволоке, ускорение — вдоль неё. Пунктир — разложение $m\vec{g}$ на составляющие $mg\sin\alpha$ (вдоль проволоки) и $mg\cos\alpha$ (поперёк)

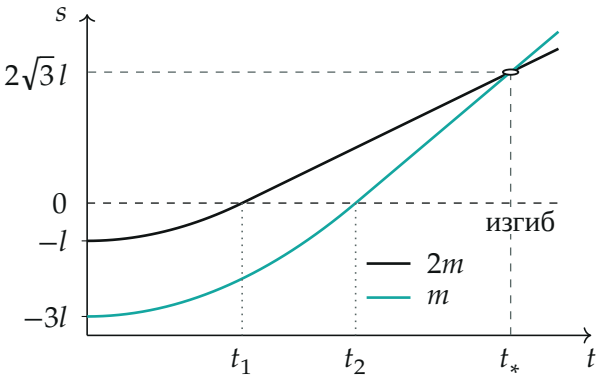
2. Скорости у изгиба. Для каждой бусинки отдельно запишем закон сохранения механической энергии от старта до изгиба: сила реакции перпендикулярна скорости и работы не совершает, трения нет, перегиб считаем плавным. Нижняя бусинка опускается на высоту $l\sin\alpha$, верхняя — на $3l\sin\alpha$:

$$2mg\,l\sin\alpha = \frac{2mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \; v_1 = \sqrt{2u},$$

$$mg\cdot 3l\sin\alpha = \frac{mv_2^2}{2} \quad \Rightarrow \; v_2 = \sqrt{6u} = \sqrt{3}\,v_1.$$

Обратите внимание: перегиб должен быть плавным (скруглённым). Тогда сила реакции в любой точке изгиба перпендикулярна скорости, работы не совершает, и модуль скорости на нём не меняется; скорость лишь поворачивается вдоль горизонтали.

Верхняя бусинка вдоль проволоки быстрее, чем нижняя, и догонит её уже на горизонтальном участке: нижняя дойдёт до изгиба за $t_1 = \sqrt{2l/(g\sin\alpha)}$, верхняя — за $t_2 = \sqrt{6l/(g\sin\alpha)} = \sqrt{3}\,t_1$, и дальше обе едут равномерно, верхняя — со скоростью в $\sqrt{3}$ раз большей. Встреча произойдёт, когда пути сравняются: $v_1(t-t_1) = v_2(t-t_2)$, откуда $t_* = 4l/(v_2 - v_1)$, а расстояние от изгиба $x_* = 2\sqrt{3}\,l \approx 3{,}5\,l$.

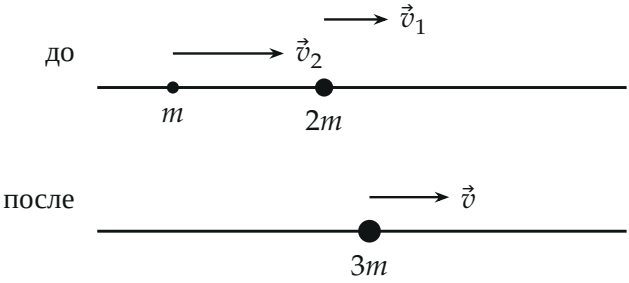


Координата вдоль проволоки s от изгиба (на склоне отрицательна) в зависимости от времени; единицы: l и $\sqrt{l/(g\sin\alpha)}$. Параболы параллельны (расстояние $2l$), на горизонтали — прямые, верхняя круче и пересекает нижнюю при t_*

3. Скорость после удара. Бусинки слипаются; на горизонтальном участке проволока действует на них вертикальной силой реакции, тяжесть тоже вертикальна. Горизонтальных внешних сил нет, поэтому запишем закон сохранения импульса системы двух бусинок в проекции на ось x за время удара (силы взаимодействия бусинок — внутренние, действие тяжести за малое время удара пренебрежимо):

$$2mv_1 + mv_2 = 3mv \quad\Rightarrow\quad v = \frac{2v_1 + v_2}{3}, \qquad v^2 = \frac{14 + 8\sqrt{3}}{9}\,u.$$

Здесь учли $v_1^2 = 2u$, $v_2^2 = 6u$, $v_1 v_2 = 2\sqrt{3}\,u$. Слипшиеся бусинки движутся вправо: $v > 0$.

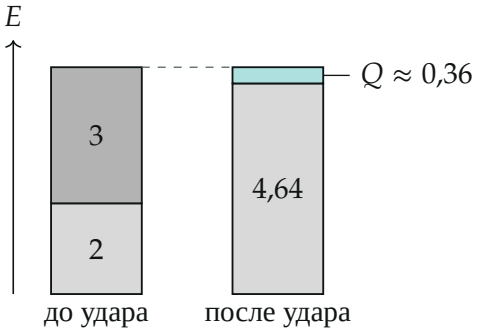


Горизонтальный участок: перед ударом и сразу после. Длины стрелок — в масштабе скоростей $v_2 = \sqrt{3}\,v_1 \approx 1{,}73\,v_1$ *и* $v \approx 1{,}24\,v_1$

4. Теплота. Запишем закон сохранения энергии для системы двух бусинок за время удара: кинетическая энергия до удара равна кинетической энергии после удара плюс выделившаяся теплота (потенциальная энергия не менялась — бусинки на одной высоте):

$$Q = \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{3mv^2}{2} = \left(5 - \frac{7+4\sqrt{3}}{3}\right) mu = \frac{4\,(2-\sqrt{3})}{3}\,mgl\sin\alpha.$$

Теплота положительна: механическая энергия при ударе действительно убывает.



Кинетическая энергия системы в единицах $mgl\sin\alpha$*: до удара* $2 + 3 = 5$ *(нижняя и верхняя бусинки), после удара —* $\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}64$*; остальное* $0{,}36$ *перешло в теплоту*

Второй способ. Убыль энергии при абсолютно неупругом ударе равна кинетической энергии относительного движения, в которой участвует приведённая масса $\mu = \dfrac{2m \cdot m}{3m} = \dfrac{2m}{3}$:

$$Q = \frac{\mu\,(v_2 - v_1)^2}{2} = \frac{m}{3}\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2\,u = \frac{m}{3}\,(8 - 4\sqrt{3})\,u$$
$$= \frac{4\,(2 - \sqrt{3})}{3}\,mgl\sin\alpha,$$

тот же результат. Физически: в системе центра масс бусинки сближаются с суммарной относительной скоростью $v_2 - v_1$ и после слипания останавливаются — вся их кинетическая энергия в этой системе превращается в тепло.

Проверка. Размерность: $mgl\sin\alpha$ — энергия, коэффициент безразмерный. Предел: при равных скоростях ($v_2 = v_1$) бусинки не сталкивались бы и $Q = 0$, в нашем выражении $Q \propto (v_2 - v_1)^2$ так и ведёт себя. Число: $4\,(2 - \sqrt{3})/3 \approx 0{,}357$, то есть в тепло уходит около 7 % энергии, полученной бусинками при спуске ($5\,mgl\sin\alpha$).

Ответ. $Q = \dfrac{4\,(2 - \sqrt{3})}{3}\,mgl\sin\alpha \approx 0{,}357\,mgl\sin\alpha$.