Подвижный блок

Задача 2. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Невесомая и нерастяжимая верёвка привязана одним концом к горизонтальному потолку, другим — к телу массой m. Верёвка охватывает подвижный блок массой $2m$, вся масса которого сосредоточена в его оси. Блок и тело удерживают так, что верёвка натянута (см. рис.). В некоторый момент тело и блок отпускают. Найти ускорение блока и ускорение тела.

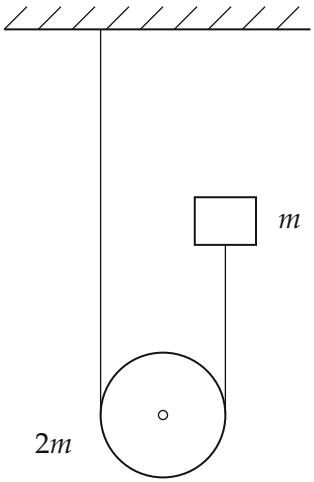
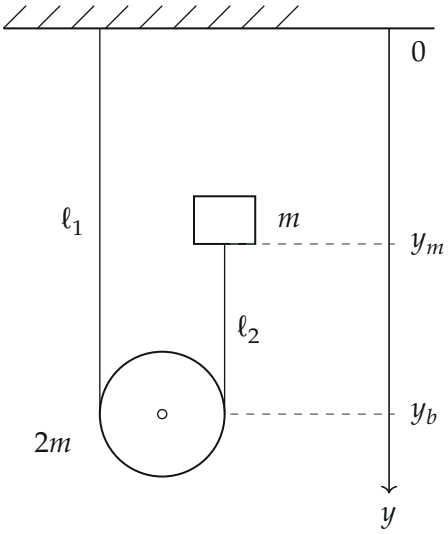


Рисунок к условию

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело и блок связаны одной нерастяжимой верёвкой, закреплённой на потолке, поэтому их ускорения не независимы: когда блок опускается на Δ, верёвка между потолком и блоком удлиняется на Δ, и участок между блоком и телом обязан укоротиться — тело опускается на 2Δ. Значит, ускорение тела вдвое больше ускорения блока. Второе уравнение даёт динамика: верёвка тянет тело вниз, а блок — вверх, причём на блок действуют две одинаковые силы натяжения. Класс задачи: кинематическая связь + второй закон Ньютона для каждого тела. План: связь ускорений → второй закон Ньютона для тела и для блока → система.

Обозначения. Ось y направим вертикально вниз (по ней ожидаем оба ускорения, так проекции положительны). y_m и y_b — координаты точки

привязки к телу и оси блока, отсчитанные от потолка; T — сила натяжения верёвки; a_1 — ускорение тела, a_2 — ускорение блока (проекции на ось y).



Участки верёвки: ℓ_1 — от потолка до блока, ℓ_2 — от блока до тела

1. Связь ускорений. Длина верёвки постоянна, поэтому она складывается из участка ℓ_1 от потолка до блока, участка ℓ_2 от блока до тела и дуги на блоке постоянной длины (πr):

$$L = \ell_1 + \ell_2 + \pi r, \qquad \ell_1 = y_b, \qquad \ell_2 = y_b - y_m,$$

$$L = 2y_b - y_m + \pi r = \text{const}.$$

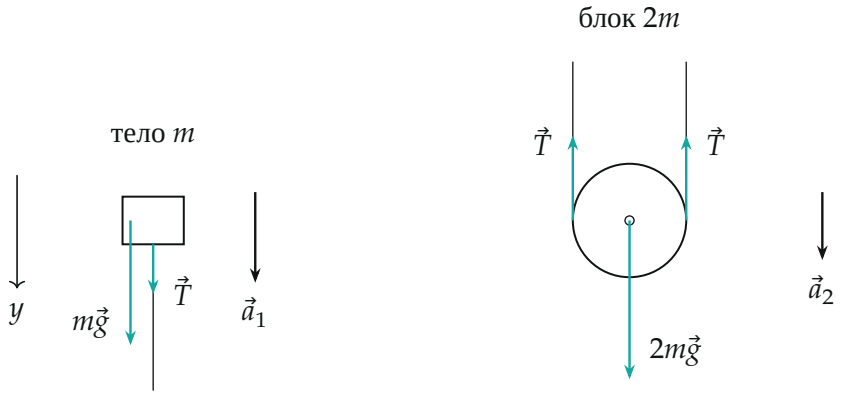
Продифференцируем это равенство по времени дважды: $2a_2 - a_1 = 0$, то есть

$$a_1 = 2a_2.$$

Тело опускается вдвое быстрее блока: верёвка слева удлиняется, справа укорачивается на ту же длину.

2. Силы на тело и на блок. Запишем второй закон Ньютона отдельно для каждого тела в проекции на ось y. Верёвка невесомая, а масса

блока вся сосредоточена в его оси, поэтому у блока нет момента инерции, и сила натяжения по обе стороны блока одна и та же (T) — иначе безмассовое «колесо» получило бы бесконечное угловое ускорение.



Силы на тело и на блок. Длины стрелок условны; ускорения связаны условием $a_1 = 2a_2$

Для тела верёвка тянет вниз (к блоку), сила тяжести тоже вниз:

$$ma_1 = mg + T.$$

Для блока сила тяжести $2mg$ направлена вниз, а обе силы натяжения — вверх: левый участок верёвки уходит вверх к потолку, правый — вверх к телу:

$$2ma_2 = 2mg - 2T.$$

3. Решаем систему. Из уравнений находим ускорения через T:

$$a_1 = g + \frac{T}{m}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m}.$$

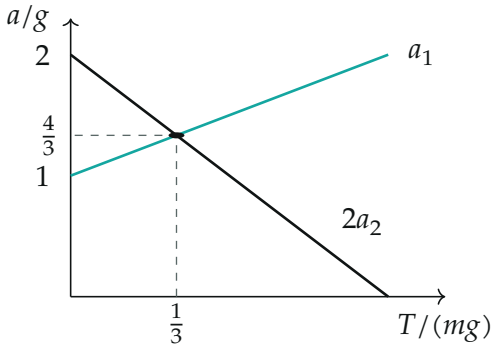
Подставим в связь $a_1 = 2a_2$:

$$g + \frac{T}{m} = 2g - \frac{2T}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{3T}{m} = g \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{3}.$$

Тогда

$$a_1 = g + \frac{g}{3} = \frac{4g}{3}, \qquad a_2 = g - \frac{g}{3} = \frac{2g}{3}.$$

Обе проекции положительны: тело и блок движутся вниз, тело быстрее; $T > 0$, верёвка действительно натянута.



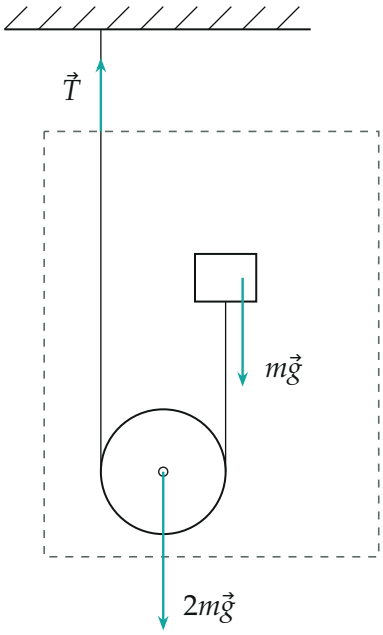
Зачем нужна натянутая верёвка: чем больше T, тем быстрее разгоняется тело (a_1) и тем медленнее блок ($2a_2$); связь $a_1 = 2a_2$ выполняется в одной точке — при $T = mg/3$

Обратите внимание. Верёвка в этой задаче обязательно натянута. Если бы $T = 0$, и тело, и блок падали бы свободно, $a_1 = a_2 = g$, а связь требует $a_1 = 2a_2$. Свободное падение с такой связью несовместимо: верёвка ограничивает движение (график слева от точки пересечения: $a_1 < 2a_2$), и она натягивается до тех пор, пока ускорения не согласуются. Второе: натяжения по обе стороны блока равны потому, что блок безынерционен (вся масса в оси).

Второй способ (центр масс системы). Внешние силы на систему «тело + верёвка + блок» — сила тяжести $3mg$ и сила, с которой потолок тянет верёвку вверх, равная T. Для суммы произведений масс на ускорения:

$$ma_1 + 2ma_2 = 3mg - T.$$

Подставим найденное: $\frac{4}{3}mg + \frac{4}{3}mg = \frac{8}{3}mg$ и $3mg - \frac{1}{3}mg = \frac{8}{3}mg$ — совпало.



Система «тело + верёвка + блок» (штриховая линия): внешние силы — тяжесть $m\vec{g}$ и $2m\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}$ в месте, где верёвка закреплена на потолке

Ещё один способ (мощность). Верёвка нерастяжима, поэтому её внутренние силы работы не совершают, и скорость роста кинетической энергии равна мощности силы тяжести. С учётом $v_1 = 2v_2$ получим $mg\,v_1 + 2mg\,v_2 = ma_1v_1 + 2ma_2v_2$, то есть $4mg\,v_2 = (2ma_1 + 2ma_2)\,v_2$, и $a_1 + a_2 = 2g$. Вместе с $a_1 = 2a_2$ это снова даёт $a_2 = \dfrac{2g}{3}$, $a_1 = \dfrac{4g}{3}$.

Проверка. Размерность: g — м/с^2, обе величины имеют размерность ускорения. Предел для произвольной массы блока M (тело — m): повторяя вывод, получаем $T = \dfrac{mMg}{M + 4m}$, $a_2 = \dfrac{(M + 2m)\,g}{M + 4m}$, $a_1 = 2a_2$. При $M = 2m$ это наши ответы, при $M \gg m$ блок падает почти свободно ($a_2 \to g$), а тело — с ускорением $\approx 2g$, как требует связь; при $M \to 0$ натяжение $T \to 0$, тело падает со свободным ускорением g, а лёгкий блок — с $g/2$.

Ответ. $a_{\text{тела}} = \dfrac{4g}{3}$, $a_{\text{блока}} = \dfrac{2g}{3}$ (оба направлены вниз); $T = \dfrac{mg}{3}$.