Ромб в узком магнитном поле

Задача 3. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Проводящий контур в форме ромба со стороной a и с отношением диагоналей 2:1 движется с постоянной скоростью v вдоль более длинной диагонали. Контур пересекает узкую область шириной d, в которой создано магнитное поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости контура. Найти количество теплоты, которое выделится в контуре за время его пролёта через область поля. Электрическое сопротивление контура — R. Считать, что ширина области поля d много меньше a. Границы области поля перпендикулярны скорости контура.

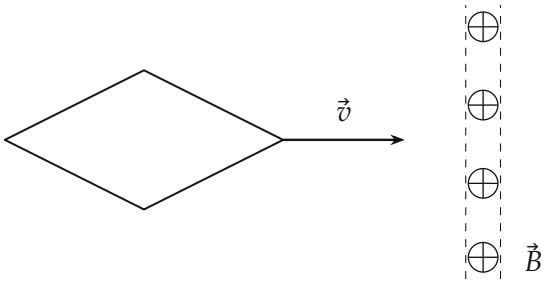


Рисунок к условию. У организаторов ромб нарисован не в масштабе; здесь отношение диагоналей взято по условию, 2:1, *состав рисунка тот же; значок в круге — поле, направленное от нас перпендикулярно плоскости контура*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Контур движется равномерно, и пока часть его находится в полосе поля, магнитный поток через него меняется. По закону электромагнитной индукции возникает ЭДС, по контуру течёт ток и выделяется теплота. Главная идея: ширина ромба растёт (или убывает) вдоль диагонали линейно, поэтому скорость изменения площади, лежащей в полосе, постоянна. Значит, ЭДС, ток и тепловая мощность постоянны, и достаточно умножить мощность на время пролёта. Класс задачи: индукция в движущемся контуре — ЭДС → электрическая цепь → теплота.

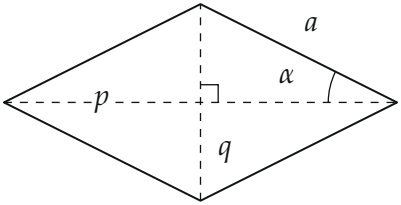
Обозначения. p и q — половины длинной и короткой диагоналей ромба; α — половина угла при вершинах на длинной диагонали (там контур

входит в поле); S — площадь части контура, лежащей в поле; $\mathcal{E}$ — ЭДС индукции, I — ток, P — тепловая мощность, Q — искомая теплота.

1. Геометрия ромба. Диагонали ромба перпендикулярны и делятся пополам, поэтому $p^2 + q^2 = a^2$ (прямоугольный треугольник с гипотенузой a). По условию $q = p/2$:

$$p = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \qquad q = \frac{a}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{q}{p} = \frac{1}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{p}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Длина длинной диагонали равна $2p = 2a\cos\alpha = 4a/\sqrt{5}$.



Ромб: $p^2 + q^2 = a^2$, $\operatorname{tg}\alpha = q/p$

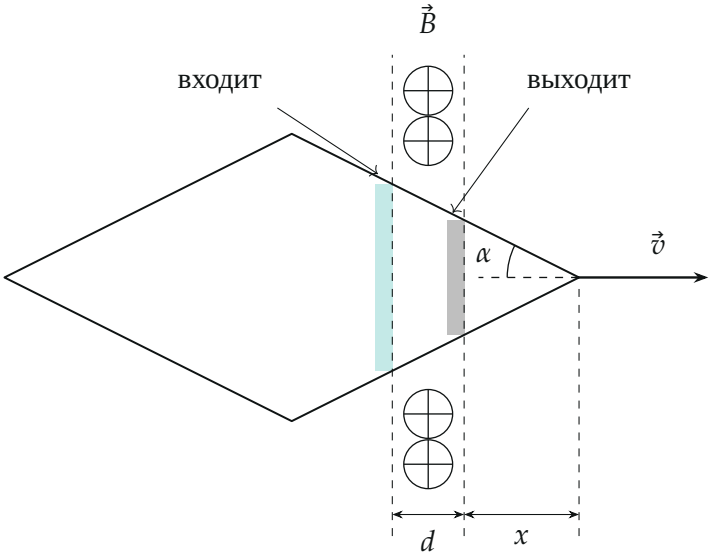
2. ЭДС индукции. По закону электромагнитной индукции за малое время Δt

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\,\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS — изменение площади части контура, лежащей в полосе (поле однородно, перпендикулярно плоскости контура, вне полосы его нет). Найдём ΔS. Пусть передняя вершина уже прошла полосу и находится на расстоянии x от её ближней границы. Ширина ромба на расстоянии u от передней вершины равна $2u\operatorname{tg}\alpha$. За время Δt контур сдвигается на $v\Delta t$, и через границы полосы проходят две узкие полоски площади контура: у правой границы из поля выходит полоска площади $2x\operatorname{tg}\alpha\cdot v\Delta t$, а у левой границы в поле входит полоска площади $2(x+d)\operatorname{tg}\alpha\cdot v\Delta t$. Поэтому

$$\Delta S = 2(x+d)\operatorname{tg}\alpha\, v\Delta t - 2x\operatorname{tg}\alpha\, v\Delta t = 2d\operatorname{tg}\alpha\, v\Delta t, \qquad \mathcal{E} = 2Bdv\operatorname{tg}\alpha.$$

Величина x сократилась: ЭДС не зависит от того, какая часть контура находится в поле, пока полоса целиком лежит в передней половине ромба (в задней — то же по модулю, но с противоположным знаком).



Контур в полосе поля. За время Δt у левой границы входит узкая полоска площади (бирюзовая), у правой выходит более узкая (серая); разность площадей — ΔS

Второй способ (ЭДС движущегося проводника). Поле есть только в полосе, поэтому ЭДС создают лишь куски сторон ромба внутри полосы. Каждая из двух сторон, пересекающих полосу, имеет внутри неё поперечную (перпендикулярную $\vec{v}$) протяжённость $d \operatorname{tg} \alpha$, а ЭДС куска проводника равна Bv, умноженному на эту протяжённость. Обходя контур, обе стороны проходим в противоположных поперечных направлениях, и ЭДС складываются: $\mathcal{E} = 2\,Bv\,d \operatorname{tg} \alpha$ — то же самое.

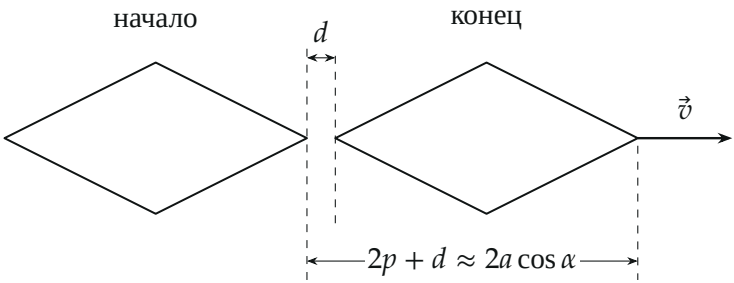
3. Тепловая мощность. По закону Ома для замкнутого контура $I = \mathcal{E}/R$, по закону Джоуля — Ленца

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{4B^2d^2v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{R}.$$

Обратите внимание: когда контур дойдёт до широкой части, поток перестаёт расти и начинает убывать — направление тока меняется на противоположное. На нагрев это не влияет: мощность зависит от квадрата ЭДС.

4. Время пролёта. ЭДС есть, пока в полосе находится хоть какая-то часть контура: от момента, когда в неё входит передняя вершина, до момента, когда её покинет задняя. За это время передняя вершина проходит путь $2p + d \approx 2p$ (ширина полосы много меньше диагонали). Контур движется равномерно:

$$t = \frac{2p}{v} = \frac{2a\cos\alpha}{v}.$$



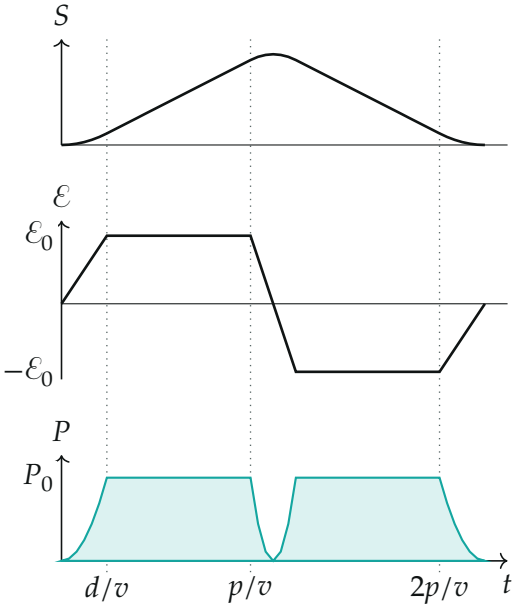
Путь контура за время пролёта — от касания полосы передней вершиной до выхода задней: $2p + d \approx 2p$

5. Теплота. Контур движется равномерно, мощность постоянна, поэтому

$$Q = Pt = \frac{4B^2d^2v^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{R} \cdot \frac{2a\cos\alpha}{v} = \frac{8aB^2d^2v\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\cos\alpha}{R}.$$

Подставим $\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

$$Q = \frac{8aB^2d^2v}{R} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4\,aB^2d^2v}{\sqrt{5}\,R}.$$



Как всё меняется со временем $t = 0 \ldots (2p+d)/v$ (отсчёт — от входа передней вершины в полосу; ширина полосы для наглядности $d = 0{,}12 \cdot 2p$). Сверху вниз: площадь части контура в поле S, ЭДС $\mathcal{E}$, тепловая мощность P. Почти всё время $|\mathcal{E}| = \mathcal{E}_0 = 2Bdv\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $P = P_0 = \mathcal{E}_0^2/R$; у краёв и в середине — короткие промежутки длительностью d/v

Графики построены точным счётом: ЭДС равна $Bv\,[\,w_{\text{лев}} - w_{\text{прав}}\,]$, где w — ширина контура на левой и правой границах полосы. Они показывают, во что превращается приближение $d \ll a$: плато P_0 занимает почти всё время, а три коротких участка (вход вершины, прохождение широкой части, выход вершины) сами длятся $3d/v$, а теплоты дают столько, сколько d/v работы на полной мощности. Точный расчёт даёт $Q_{\text{точн}} = Q\left(1 - \dfrac{d}{2p}\right) = Q\left(1 - \dfrac{\sqrt{5}\,d}{4a}\right)$, и при $d \ll a$ поправка мала.

Обратите внимание. Условие $d \ll a$ нужно, чтобы считать ЭДС постоянной на всём пролёте и путь равным $2p$, а не $2p + d$: на краях ЭДС другая (график). Без него ответ был бы точнее, но сложнее.

Проверка. Размерность: Bdv имеет размерность вольта, $(Bdv)^2/R$ — ватт, умножение на время a/v даёт джоуль. Пределы: при $d \to 0$ или

$B \to 0$ теплота $Q \to 0$ (как d^2 и B^2): поле исчезает. При $\operatorname{tg}\alpha \to 0$ (очень узкий ромб) $Q \to 0$: площадь в поле почти не меняется. Второй способ (баланс мощности): сила Ампера на сторонах внутри полосы тормозит контур, $F = 2IBd\operatorname{tg}\alpha = \mathcal{E}I/v$, и работа внешней силы, удерживающей $v = \text{const}$, за время t равна $Fvt = \mathcal{E}It = Pt = Q$.

Ответ. $Q = \dfrac{4aB^2d^2v}{\sqrt{5}R}$.