Поршень с песком

Задача 4. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 4] В сосуде под массивным поршнем, на котором лежит куча песка, находится одноатомный идеальный газ. Объём газа V, давление p. Если песок снимать с поршня медленно — по одной песчинке, — то объём газа увеличится вдвое, когда весь песок будет снят. Какой была бы кинетическая энергия поршня в тот момент, когда объём газа возрастёт вдвое, если бы весь песок сняли с поршня сразу? Атмосферное давление отсутствует. Сосуд с газом очень хорошо теплоизолирован. *Указание.* В адиабатическом процессе давление и объём одноатомного идеального газа связаны соотношением $pV^{5/3} = \text{const}$.

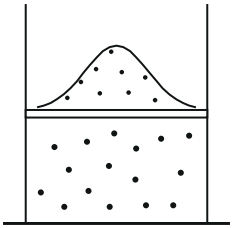
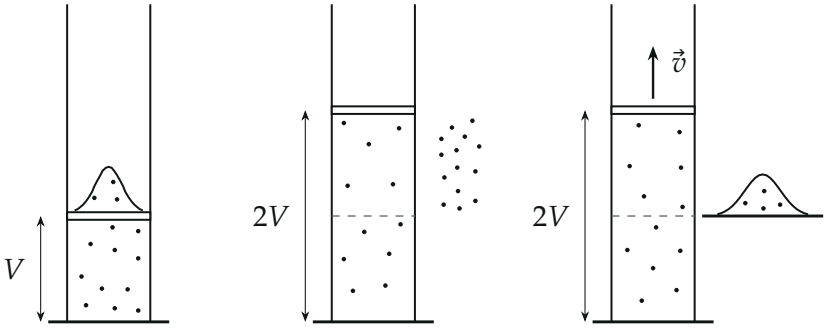


Рисунок к условию

▲ **Решение. Что происходит.** Газ в теплоизолированном сосуде расширяется, поршень массивный и поэтому движется медленно по сравнению с молекулами: в любой момент газ успевает прийти в равновесие, и его состояние идёт по адиабате $pV^{5/3} = \text{const}$ независимо от того, как быстро сняли песок. Работа газа при расширении от V до $2V$ поэтому одна и та же в обоих случаях и берётся из его внутренней энергии. Различается лишь то, на что она тратится: при медленном снятии — на подъём поршня и песка, а при мгновенном песок остаётся на старом уровне, и работа идёт на подъём поршня и на его кинетическую энергию. Класс задачи: адиабата + закон сохранения энергии (энергия газа → механическая энергия поршня). План: давление газа в конце → работа газа → потенциальная энергия поршня из равновесия → кинетическая энергия.

Обозначения. M — масса поршня, S — площадь его сечения, h — высота подъёма поршня при увеличении объёма вдвое ($Sh = V$), p_1

— давление газа при объёме $2V$, E_k — искомая кинетическая энергия поршня. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}pV$.



а) начало б) по зёрнышку в) сразу

Три состояния: а) начальное, б) медленное снятие — песок убирают по зёрнышку и складывают на уровнях, через которые проходит поршень, в) мгновенное снятие — песок остаётся на начальном уровне, а поршень, достигнув объёма $2V$, имеет скорость $\vec{v}$. Пунктир — начальное положение поршня

1. Давление в конце. При $V \to 2V$ газ остаётся на адиабате $pV^{5/3} = p_1(2V)^{5/3}$, откуда

$$p_1 = \frac{p}{2^{5/3}} \approx 0{,}315\,p.$$

Это давление не зависит от способа снятия песка: оно определяется только объёмом $2V$ (при условии, что газ всё время в равновесии).

2. Работа газа. Запишем закон сохранения энергии для газа: теплоизоляция хорошая, теплообмена нет, поэтому работа газа равна убыли его внутренней энергии. Для одноатомного газа $U = \frac{3}{2}pV$:

$$A = U - U_1 = \frac{3}{2}\big(pV - p_1 \cdot 2V\big) = \frac{3}{2}pV\big(1 - 2^{-2/3}\big) \approx 0{,}555\,pV,$$

потому что $p_1 \cdot 2V = pV \cdot 2^{-2/3}$. Газ действительно совершает работу, а его внутренняя энергия уменьшается.

Второй способ (площадь под адиабатой). Работа газа — площадь под

кривой $p(V')$ на диаграмме:

$$A = \int_V^{2V} p(V')\,dV' = pV^{5/3}\int_V^{2V} V'^{-5/3}\,dV' = \frac{3}{2}pV\left(1-2^{-2/3}\right),$$

тот же результат.

3. Потенциальная энергия поршня. В конце медленного снятия поршень покоится (атмосферного давления нет, песка нет). Запишем условие его равновесия в проекции на вертикаль: вес уравновешен силой давления газа, $Mg = p_1 S$. Умножим на h и учтём, что $Sh = V$ (объём вырос на V):

$$Mgh = p_1 Sh = p_1 V = \frac{pV}{2^{5/3}} \approx 0{,}315\,pV.$$

4. Мгновенное снятие песка. Запишем закон сохранения энергии для газа и поршня: газ при переходе из объёма V в $2V$ отдаёт ту же энергию A (шаги 1–2), а песок остаётся на месте, поэтому она идёт на подъём поршня и его кинетическую энергию:

$$A = Mgh + E_k \quad\Rightarrow\quad E_k = A - Mgh,$$

$$E_k = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2\cdot 2^{2/3}} - \frac{1}{2^{5/3}}\right) = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^{5/3}}\right).$$

Так как $4/2^{5/3} = 2^{1/3}$,

$$E_k = pV\left(\frac{3}{2} - 2^{1/3}\right) \approx 0{,}24\,pV.$$

Кинетическая энергия положительна: поршень в этот момент движется вверх.

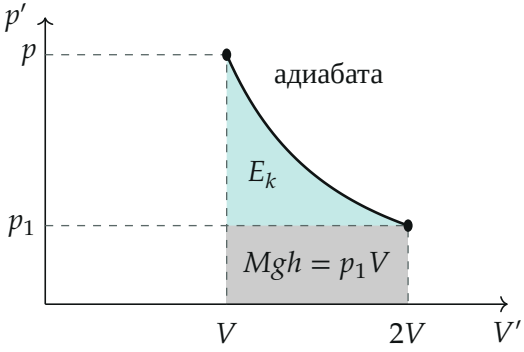
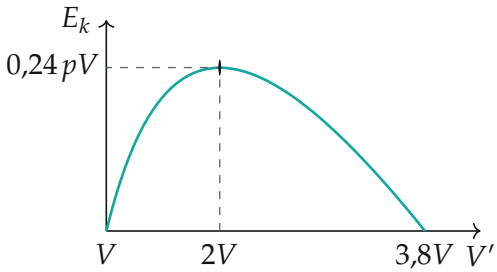


Диаграмма $p'(V')$. Площадь под адиабатой — работа газа A. Серый прямоугольник под уровнем p_1 — $Mgh = p_1V$ (подъём поршня), бирюзовая область между адиабатой и уровнем p_1 — кинетическая энергия E_k

Второй способ (динамика поршня). Пока поршень поднимается, на него действуют сила давления газа $p'S$ вверх и сила тяжести $Mg = p_1S$ вниз. По теореме о кинетической энергии

$$E_k = \int_0^h (p'S - Mg)\,dh' = \int_V^{2V} (p' - p_1)\,dV',$$

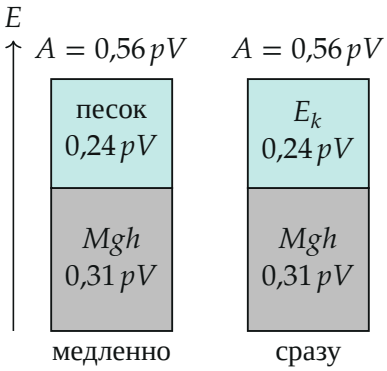
то есть E_k — площадь между адиабатой и горизонталью $p' = p_1$ (бирюзовая область на графике). Она равна $A - p_1V$, как и в шаге 4.



Кинетическая энергия поршня в зависимости от достигнутого объёма. Максимум — ровно при $V' = 2V$, где сила давления газа уравновешена весом поршня; дальше поршень тормозится и останавливается при $V' \approx 3{,}8V$

Обратите внимание. Адиабата $pV^{5/3} = \text{const}$ верна для равновесного процесса. Поршень массивный, поэтому, даже если песок сняли

мгновенно, он набирает скорость медленно по сравнению со скоростью молекул, газ успевает выравнивать давление, и состояние газа лежит на той же адиабате. Поэтому давление в момент $V' = 2V$ равно тому же $p_1 = p/2^{5/3}$ и сила давления $p_1 S$ в этот момент ровно уравновешивает вес поршня: это положение равновесия поршня — в нём скорость наибольшая (см. график).



Куда уходит одна и та же работа газа $A = 0{,}56\,pV$: при медленном снятии — на подъём поршня и песка, при мгновенном — на подъём поршня и его кинетическую энергию

Проверка. Размерность: pV — энергия. Предел: если бы песок снимали бесконечно медленно, то поршень не получил бы кинетической энергии, а вся работа газа ушла бы в Mgh плюс подъём песка; разность $A - Mgh \approx 0{,}24\,pV$ в этом случае — потенциальная энергия поднятого песка, и она в точности равна найденной E_k при мгновенном снятии. Числовая проверка динамики поршня (численное решение $M\ddot{x} = (p' - p_1)S$ при $p' = p\,(V/V')^{5/3}$ от покоя при объёме V) даёт в момент $V' = 2V$ кинетическую энергию $0{,}2401\,pV$. Проверка верхнего предела: $E_k \le A$, и $0{,}24 < 0{,}56$.

Ответ. $E_k = pV\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{2^{5/3}}\right) = pV\left(\dfrac{3}{2} - 2^{1/3}\right) \approx 0{,}24\,pV.$