Треугольник на трёх нитях

Задача 5. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Вырезанный из листа фанеры равносторонний треугольник подвешен за три нити, которые одними своими концами прикреплены к вершинам треугольника, а вторыми — к одной точке на потолке. Длины нитей равны l, l и $1{,}2\,l$. Размер стороны треугольника a. Сила натяжения самой короткой нити известна и равна T. Найти силу натяжения нити, имеющей длину $1{,}2\,l$. Все нити натянуты.

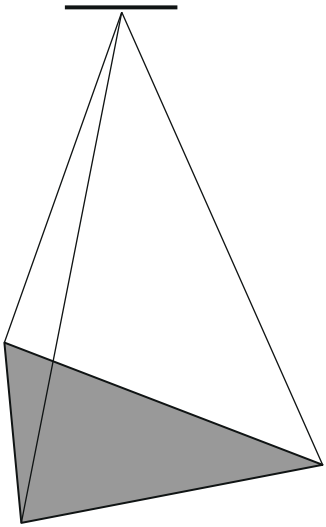
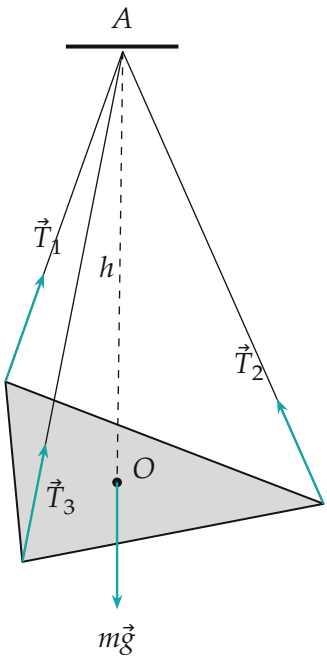


Рисунок к условию

▲ **Решение. Что происходит.** Треугольник неподвижен: на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и три силы натяжения. Все три нити сходятся в одной точке A, и это даёт два факта. Во-первых, моменты сил натяжения относительно A равны нулю, поэтому и момент силы тяжести относительно A должен быть нулевым: центр треугольника O лежит на вертикали под A. Во-вторых, натяжение нити — вектор вдоль нити, $\vec{T}_i = k_i\,\vec{\ell}_i$, где $\vec{\ell}_i$ — вектор от вершины к A, а $k_i = T_i/\ell_i$ (так действовала бы пружина нулевой длины жёсткости k_i). Сумма векторов $\vec{\ell}_i$ от трёх вершин правильного треугольника к точке A равна $3\vec{h}$, где $\vec{h}$ — вектор от центра

O к A, то есть вертикальна; в плоскости треугольника остаток получается нулевым только при равных k_i. Поэтому силы натяжения *пропорциональны длинам нитей*, и $T_3 = 1{,}2\,T$. Класс задачи: равновесие тела под действием сил — векторное условие и условие моментов.

Обозначения. Нити длины $\ell_1 = l$, $\ell_2 = l$, $\ell_3 = 1{,}2\,l$ прикреплены к вершинам 1, 2, 3 и натянуты силами $T_1 = T_2 = T$, T_3 (по условию T — сила натяжения самой короткой нити; две нити длины l симметричны, поэтому их натяжения равны). O — центр треугольника (центр масс, точка пересечения медиан), $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ — векторы из O в вершины, $\vec{h}$ — вектор из O в точку A, $h = |\vec{h}|$.



Треугольник на трёх нитях (вид сверху-сбоку, для рисунка взято $a = 0{,}8\,l$): силы натяжения направлены вдоль нитей к точке подвеса A, сила тяжести — из центра O вертикально вниз

1. Где центр треугольника. Треугольник в равновесии, поэтому сумма моментов всех сил относительно любой точки равна нулю. Выберем точку A: линии действия всех трёх сил натяжения проходят через A, их

моменты нулевые. Значит, и момент силы тяжести $m\vec{g}$ относительно A равен нулю: её линия действия, то есть вертикаль через центр масс O, проходит через A. Итак, $\vec{h}$ направлен вертикально вверх и

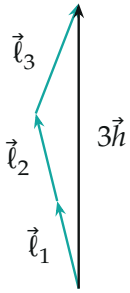
$$m\vec{g} = -\frac{mg}{h}\,\vec{h}.$$

(Центр масс однородного треугольника из фанеры — его центр, точка пересечения медиан, для неё $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$.)

2. Сила натяжения как вектор. Вектор от вершины i к точке подвеса равен $\vec{\ell}_i = \vec{h} - \vec{r}_i$, его длина — длина нити ℓ_i. Сила натяжения направлена вдоль нити, поэтому

$$\vec{T}_i = T_i\,\frac{\vec{\ell}_i}{\ell_i} = k_i\,\vec{\ell}_i = k_i\,(\vec{h} - \vec{r}_i), \qquad k_i = \frac{T_i}{\ell_i} > 0.$$

Сложим три вектора $\vec{\ell}_i$: так как $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$, получаем $\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 = 3\vec{h}$ — вертикальный вектор.



Сумма $\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 = 3\vec{h}$ (вид в плоскости симметрии, где $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ имеют одну и ту же проекцию): сумма вертикальна. При равных k_i такой же будет и сумма сил натяжения

3. Условие равновесия сил. Запишем векторное условие равновесия треугольника и подставим $\vec{r}_3 = -\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $m\vec{g}$ из шага 1:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + m\vec{g} = 0,$$

$$\Big(k_1 + k_2 + k_3 - \frac{mg}{h}\Big)\vec{h} - (k_1 - k_3)\,\vec{r}_1 - (k_2 - k_3)\,\vec{r}_2 = 0.$$

Векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ лежат в плоскости треугольника и не параллельны, а $\vec{h}$ эту плоскость пересекает (точка A не лежит в плоскости треугольника: нити не лежат в одной плоскости с ним). Такие три вектора линейно независимы, поэтому равенство нулю возможно, только когда равны нулю все три коэффициента:

$$k_1 = k_2 = k_3 = k, \qquad 3k = \frac{mg}{h}.$$

4. Ответ. Из $k_i = k$ следует $T_i = k\ell_i$: натяжения пропорциональны длинам нитей. Для двух нитей длины l натяжение $T = kl$, для нити длины $1{,}2\,l$

$$T_3 = k \cdot 1{,}2\,l = 1{,}2\,T.$$

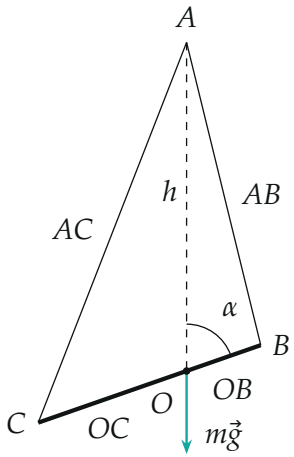
Второй способ (проверка подстановкой). Положим $T_i = k\ell_i$ с $k = mg/(3h)$ и проверим равновесие. Сумма сил: $\sum k\vec{\ell}_i = k(3\vec{h} - \sum \vec{r}_i) = 3k\vec{h}$ — вертикальный вектор длиной $3kh = mg$, он уравновешивает $m\vec{g}$. Сумма моментов относительно O: $\sum \vec{r}_i \times k\vec{\ell}_i = k(\sum \vec{r}_i) \times \vec{h} - k\sum \vec{r}_i \times \vec{r}_i = 0$ (сила тяжести приложена в O и момента не создаёт). Оба условия выполнены; система линейна и, как показал шаг 3, решение единственно.

Обратите внимание. Точка подвеса не лежит в плоскости треугольника — так на рисунке, и именно поэтому решение единственно (случаи, когда A оказывается в этой плоскости, возможны лишь при $a = 0{,}24\,l$ и $a = 1{,}84\,l$, см. график ниже). Если бы A лежала в плоскости треугольника, все силы были бы в одной плоскости, неизвестных осталось бы три на два уравнения, и натяжения не определялись бы однозначно. И ещё: то, что две нити одинаковы, даёт лишь $T_1 = T_2$ (симметрия); равенство k_i для третьей нити — результат шага 3, а не соображение «длиннее — сильнее».

Дополнение: как связаны T, m, a, l. Для ответа на вопрос геометрия не нужна, но она показывает, что конфигурация существует, и выражает T через массу. В плоскости симметрии (через A, O, середину B стороны треугольника с нитями длины l и третью вершину C) заданы длины

$$AB = \sqrt{l^2 - \tfrac{a^2}{4}}, \quad AC = 1{,}2\,l, \quad OB = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad OC = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$\angle AOB = \alpha, \quad \angle AOC = \pi - \alpha.$$



Вид в плоскости симметрии (для рисунка $a = 0{,}8\,l$): O — центр треугольника, B — середина стороны, к концам которой привязаны нити длины l (проекции обеих нитей совпадают с AB); треугольник виден ребром

Теорема косинусов для треугольников AOB и AOC:

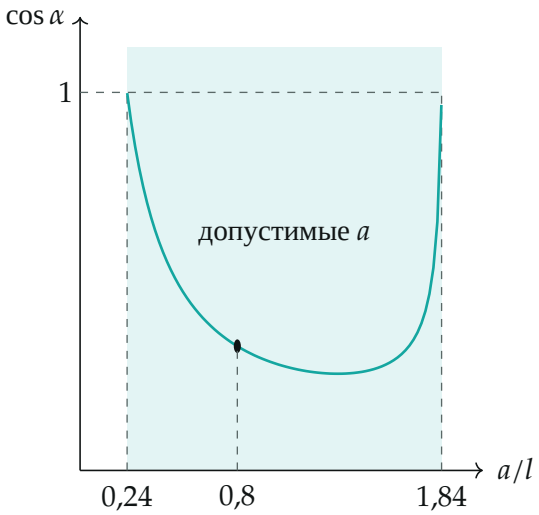
$$l^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} + h^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\,ah\cos\alpha, \qquad 1{,}44\,l^2 = \frac{a^2}{3} + h^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\,ah\cos\alpha.$$

Удвоим первое уравнение и сложим со вторым: слагаемые с $\cos\alpha$ уходят, остаётся $3{,}44\,l^2 - a^2 = 3h^2$, то есть

$$h = \sqrt{\frac{3{,}44\,l^2 - a^2}{3}}, \qquad T = kl = \frac{mg\,l}{3h} = \frac{mg\,l}{\sqrt{3\,(3{,}44\,l^2 - a^2)}},$$

$$T_3 = 1{,}2\,T = \frac{1{,}2\,mg\,l}{\sqrt{3\,(3{,}44\,l^2 - a^2)}}.$$

Вычитание уравнений даёт ещё $\cos\alpha = \dfrac{0{,}44\,l^2}{\sqrt{3}\,a\,h}$. Условие $\cos\alpha < 1$ ограничивает размеры: треугольник со всеми натянутыми нитями существует лишь при $0{,}24\,l < a < 1{,}84\,l$.



Для каких размеров треугольника нити натянуты: $\cos\alpha = 0{,}44\,l^2/(\sqrt{3}\,a\,h)$ *должен быть меньше единицы. На рисунках взято* $a = 0{,}8\,l$, $\cos\alpha \approx 0{,}33$

Проверка. Размерность: $k = T_i/\ell_i$ — Н/м, $T_i = k\ell_i$ — Н. Предельный случай: при равных длинах всех трёх нитей ($1{,}2\,l \to l$) выражение для h превращается в $h^2 = l^2 - a^2/3$ (расстояние от точки A до центра правильного треугольника при трёх равных нитях), а три равные силы $T = mg/(3\cos\theta)$, $\cos\theta = h/l$, — хорошо известный ответ для симметричной подвески. Численная проверка: решение системы шести уравнений равновесия (три составляющие сил и три составляющие моментов) для конкретной геометрии ($a = 0{,}8\,l$) даёт $T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 1 : 1{,}2$ и $mg = 2{,}9\,T$, как и должно быть ($3h/l = 2{,}90$).

Ответ. $T_3 = 1{,}2\,T$ (силы натяжения нитей пропорциональны их длинам); через массу треугольника $T_3 = \dfrac{1{,}2\,mg\,l}{\sqrt{3\,(3{,}44\,l^2 - a^2)}}$.