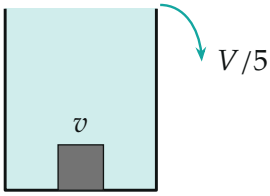
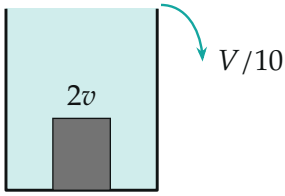
Гирька в сосуде с водой

Задача 3. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 7 класс, задача 3] В открытый сосуд налили (не до верха) воду объёмом $V = 200$ мл. Когда в сосуд аккуратно опустили металлическую гирьку, которая полностью в него поместилась, из сосуда вылилась вода объёмом $V/5$. Когда в тот же сосуд налили вдвое меньшее количество воды и положили вдвое более тяжёлую гирьку из того же металла, которая полностью в него поместилась, из сосуда вылился объём воды $V/10$. Найти объём сосуда.



опыт 1: вода V



опыт 2: вода $V/2$

Поясняющий рисунок: после того как гирька опущена, сосуд полон до краёв, лишняя вода вылилась

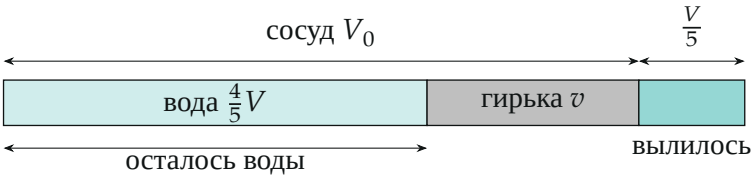
▲ **Решение.** **Что происходит.** Гирька целиком под водой и вытесняет объём воды, равный своему объёму. Воды и гирьки вместе оказалось больше, чем помещается в сосуд, поэтому излишек вылился, а сосуд остался полным до краёв. Отсюда простое правило: *объём воды + объём гирьки = объём сосуда + вылившийся объём*. Класс задачи — баланс объёмов, две неизвестные из двух опытов.

Обозначения. V_0 — объём сосуда; v — объём первой гирьки.

1. Объём второй гирьки. Гирька из того же металла, значит, той же плотности ρ. Масса $m = \rho v$ пропорциональна объёму: вдвое более тяжёлая гирька имеет объём $2v$.

2. Баланс объёмов в первом опыте. Сосуд после опускания гирьки полон, в нём вода $V - V/5$ и гирька v:

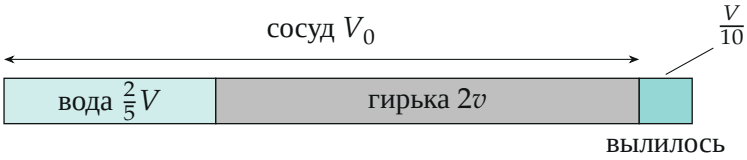
$$V - \frac{V}{5} + v = V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}V + v = V_0.$$



Опыт 1: вода и гирька вместе на $\frac{V}{5}$ больше сосуда (масштаб — найденные ниже числа)

3. Баланс объёмов во втором опыте. Воды $V/2$, гирька $2v$, вылилось $V/10$:

$$\frac{V}{2} - \frac{V}{10} + 2v = V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}V + 2v = V_0.$$



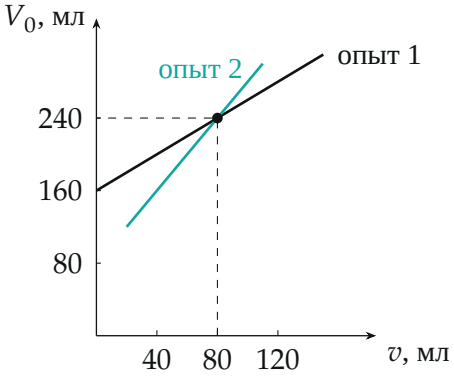
Опыт 2: воды вдвое меньше, гирька вдвое больше, излишек $\frac{V}{10}$

4. Решаем систему. Вычтем из второго уравнения первое: V_0 сокращается,

$$v - \frac{2}{5}V = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{5}V = 80 \text{ мл}.$$

Из первого уравнения

$$V_0 = \frac{4}{5}V + \frac{2}{5}V = \frac{6}{5}V = 240 \text{ мл}.$$



Каждый опыт даёт прямую на плоскости (v, V_0)*:* $V_0 = 160 + v$ *и* $V_0 = 80 + 2v$*; ответ — точка пересечения* $v = 80$ *мл,* $V_0 = 240$ *мл*

Обратите внимание. Вода вылилась не вся «лишняя по гирьке», а только излишек над объёмом сосуда: в сосуде сначала было свободное место. Поэтому вылившийся объём не равен объёму гирьки ($V/5 = 40$ мл, а $v = 80$ мл).

Проверка. Опыт 1: $200 + 80 = 280$ мл, сосуд 240 мл, вылилось $40 = V/5$ мл. Опыт 2: $100 + 160 = 260$ мл, вылилось $20 = V/10$ мл. Оба условия выполнены. Свободное место до гирьки в первом опыте $240 - 200 = 40$ мл — вода налита не до верха, как сказано в условии.

Смысл: два опыта дают два уравнения на две неизвестные — объём сосуда и объём гирьки.

Ответ. $V_0 = \dfrac{6}{5} V = 240$ мл.