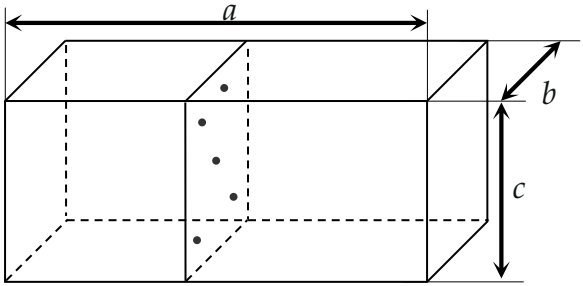
Изюм в батоне

Задача 4. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 7 класс, задача 4] В пекарне изготовили белый хлеб с изюмом. Батон имеет форму прямоугольного параллелепипеда («кирпичика») с размерами сторон (длина–ширина–высота) $a = 20$ см, $b = 8$ см и $c = 12$ см. Известно, что на разрезе, перпендикулярном длинному ребру, в среднем оказываются разрезанными $n = 5$ изюминок (см. рисунок, на котором показана схема батона и разреза). Найти среднее число изюминок в каждом батоне. Считать, что все изюминки имеют форму шариков с радиусом $r = 0{,}4$ см и равномерно распределены по объёму батона.

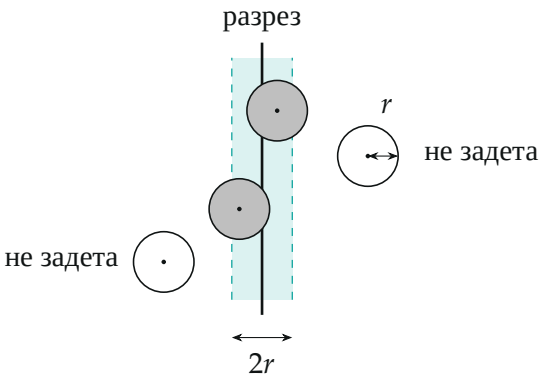


▲ **Решение. Что происходит.** Нож задевает не только изюминки, центры которых лежат точно в плоскости разреза, но и все, чей центр от неё ближе радиуса r. Значит, разрезанные изюминки — это все изюминки, центры которых попали в тонкий слой толщиной $2r$ вокруг разреза. Изюм распределён равномерно, поэтому число изюминок пропорционально объёму: весь батон во столько раз «богаче», во сколько он длиннее слоя. Класс задачи — оценка числа частиц через долю объёма (средние величины).

Обозначения. $V = abc$ — объём батона; V_0 — объём слоя, в котором лежат центры разрезанных изюминок; N — среднее число изюминок в батоне.

1. Какие изюминки разрезаны. Шарик радиуса r пересекает плоскость разреза, если расстояние d от его центра до плоскости меньше r:

$-r < d < r$. Центры разрезанных изюминок лежат в слое толщиной $2r$, плоскость разреза — посередине слоя.

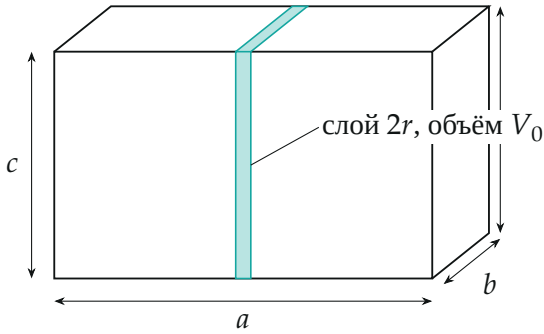


Вид сбоку на разрез: задеты (серые) только изюминки с центром в слое толщиной $2r$ (бирюза)

2. Объём слоя. Слой имеет поперечное сечение батона $b \times c$ и толщину $2r$:

$$V_0 = 2r\,bc.$$

В нём в среднем $n = 5$ центров изюминок.



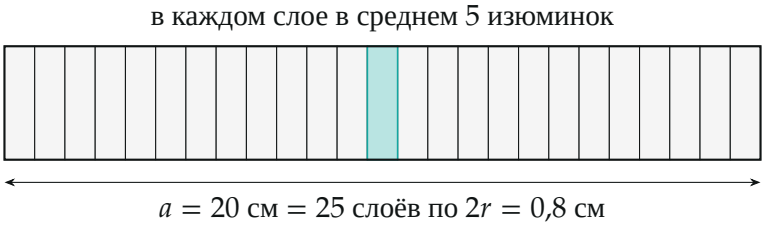
Слой толщиной $2r$ поперёк батона: центры $n = 5$ разрезанных изюминок лежат в нём

3. Равномерность. При равномерном распределении число изюминок в части батона пропорционально её объёму:

$$\frac{N}{n} = \frac{V}{V_0} = \frac{abc}{2r\,bc} = \frac{a}{2r}.$$

4. Ответ.

$$N = \frac{a}{2r}\,n = \frac{20}{0{,}8} \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125.$$



Батон нарезан мысленно на 25 одинаковых слоёв толщиной $2r$; в каждом — в среднем по 5 центров изюминок, всего 125

Обратите внимание. Толщина слоя — $2r$ (диаметр), а не r: изюминка задета и тогда, когда её центр слева от разреза, и когда справа. С толщиной r ответ вышел бы вдвое больше, 250.

Проверка. N безразмерно: a и $2r$ в сантиметрах. Ответ не зависит от b и c: и слой, и батон имеют одинаковое сечение. Предел: чем мельче изюминки ($r \to 0$), тем реже нож их задевает, и при той же n их в батоне должно быть больше — формула $N = \frac{a}{2r}\,n$ это и даёт. Изюм занимает $125 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 34$ см^3 из 1920 см^3 — около 2% объёма, правдоподобно для батона.

Смысл: разрез «видит» слой толщиной в диаметр изюминки, и батон состоит из $a/(2r)$ таких слоёв.

Ответ. $N = \dfrac{a}{2r}\,n = 125$ изюминок.