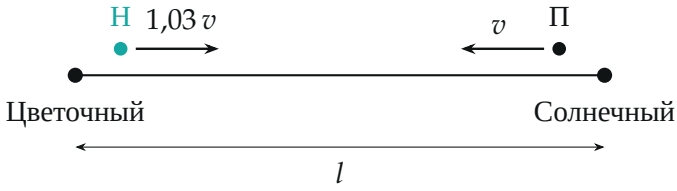
Встречи Незнайки и Пончика

Задача 5. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 7 класс, задача 5] Незнайка и Пончик одновременно выехали из Цветочного и Солнечного городов навстречу друг другу со скоростями $1{,}03\,v$ и v соответственно. Встретившись, они, не останавливаясь, продолжили движение. Доехав до пунктов назначения (Солнечного и Цветочного городов соответственно), они развернулись и снова поехали навстречу друг другу. Затем они снова встретились, продолжили движение, доехали до пунктов назначения, развернулись и снова поехали навстречу друг другу. И так далее. В момент какой по счёту встречи коротышек впервые окажется, что они движутся в одном направлении? Считать, что Незнайка и Пончик движутся с постоянными по величине скоростями, а разворачиваются мгновенно.

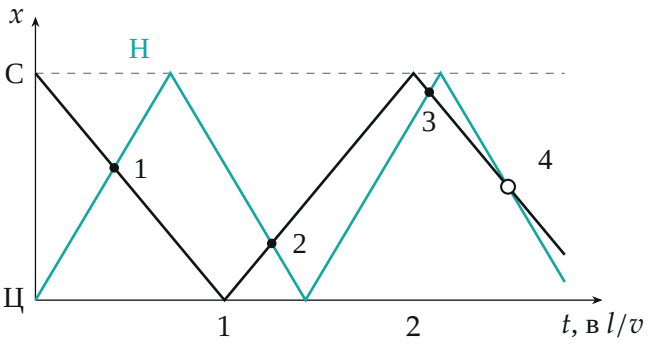


Поясняющий рисунок: Незнайка (Н) и Пончик (П) стартуют из своих городов навстречу друг другу

▲ **Решение.** **Что происходит.** Встречи бывают двух видов. Пока скорости почти равны, коротышки встречаются «лоб в лоб»: каждый раз, когда в сумме они проехали ещё два расстояния между городами. Но Незнайка чуть быстрее и понемногу набирает лишний путь. Когда его путь станет больше пути Пончика ровно на l, он догонит Пончика сзади — это встреча, на которой они едут в одну сторону. Надо понять, сколько встреч «лоб в лоб» успеет случиться до этого момента. Класс задачи — равномерное движение со встречами и разворотами, сравнение пройденных путей.

Обозначения. l — расстояние между городами; $v_1 = 1{,}03\,v$, $v_2 = v$; $s_1 = v_1 t$ и $s_2 = v_2 t$ — пути Незнайки и Пончика к моменту t (с учётом всех разворотов).

1. Картина движения. Чтобы увидеть оба вида встреч, нарисуем график «положение — время» для большей разницы скоростей, $v_1 = 1{,}4\,v$: каждый ездит туда-обратно по ломаной, встреча — пересечение ломаных.



Положение Незнайки (бирюза) и Пончика (чёрный) при $v_1 = 1{,}4\,v$: встречи 1–3 «лоб в лоб» (точки), встреча 4 — Незнайка догоняет Пончика (кружок), оба едут к Цветочному

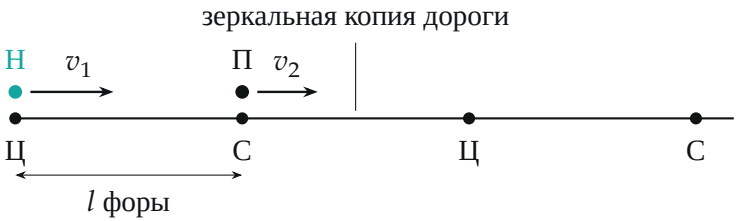
2. Встречи «лоб в лоб». Первая встреча: вместе проехали l. Дальше, чтобы встретиться снова, каждому надо доехать до чужого города и вернуться навстречу — вместе ещё $2l$. Значит, k-я встреча «лоб в лоб» наступает, когда

$$s_1 + s_2 = (2k-1)\,l \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{(2k-1)\,l}{v_1 + v_2} = \frac{(2k-1)\,l}{2{,}03\,v}.$$

3. Встреча «вдогонку». Мысленно «распрямим» дорогу: вместо того чтобы разворачиваться в городе, коротышка едет дальше по такой же дороге, отражённой в зеркале (города стоят через каждые l). Положение на настоящей дороге — то же, что на распрямлённой, если её «сложить гармошкой». Пончик стартует из Солнечного, то есть на распрямлённой дороге он на l впереди Незнайки и едет в ту же сторону. Незнайка догонит его, когда отыграет это l:

$$s_1 - s_2 = l \quad \Rightarrow \quad t_* = \frac{l}{v_1 - v_2} = \frac{l}{0{,}03\,v} \approx 33{,}33\,\frac{l}{v}.$$

В этот момент они в одной точке распрямлённой дороги, а значит, и настоящей, и едут в одну сторону.

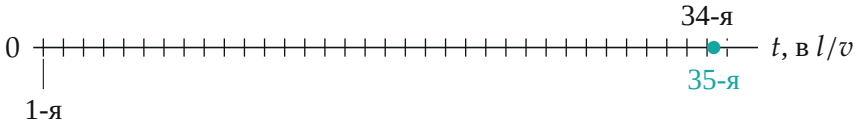


«Распрямлённая» дорога: развороты заменены зеркальными копиями. Пончик (из Солнечного) на l впереди Незнайки, оба едут вправо

4. Сколько встреч «лоб в лоб» до t_*. Условие $t_k < t_*$:

$$\frac{(2k-1)\,l}{2{,}03\,v} < \frac{l}{0{,}03\,v} \quad\Rightarrow\quad 2k-1 < \frac{2{,}03}{0{,}03} \approx 67{,}7 \quad\Rightarrow\quad k \leq 34.$$

34-я встреча «лоб в лоб» в момент $t_{34} = \frac{67}{2{,}03}\frac{l}{v} \approx 33{,}00\,\frac{l}{v}$, следующая была бы в $t_{35} \approx 33{,}99\,\frac{l}{v}$ — уже после $t_* \approx 33{,}33\,\frac{l}{v}$. Поэтому встреча «вдогонку» — 35-я по счёту.



Моменты встреч: штрихи — 34 встречи «лоб в лоб» (через $\frac{2}{2{,}03}\,\frac{l}{v}$ каждая), бирюзовая точка — Незнайка догоняет Пончика в $t_* \approx 33{,}33\,\frac{l}{v}$, раньше несостоявшейся встречи «лоб в лоб» (пунктирный штрих)

Обратите внимание. Совпадение моментов $t_k = t_*$ означало бы, что встречи сливаются (коротышки встречаются в городе). Здесь $\frac{2{,}03}{0{,}03}$ не целое, такого нет. И считать надо все встречи подряд, вместе со встречей «вдогонку»: она 35-я, а не 1-я по счёту среди «вдогонок».

Проверка. Общая формула: номер встречи n — наименьшее целое, большее $\frac{v_1}{v_1-v_2}$ (из $2k-1 < \frac{v_1+v_2}{v_1-v_2}$ следует $k < \frac{v_1}{v_1-v_2}$). Для $v_1 = 1{,}4\,v$:

$\frac{1{,}4}{0{,}4} = 3{,}5$, $n = 4$ — как на графике. Для $1{,}03\,v$: $\frac{1{,}03}{0{,}03} \approx 34{,}3$, $n = 35$. Численное моделирование движения (python) тоже даёт первую встречу в одном направлении 35-й, в момент $33{,}33\,l/v$, на расстоянии $l/3$ от Цветочного. Предел: при $v_1 \to v_2$ ответ уходит в бесконечность — с равными скоростями они всегда встречаются лоб в лоб.

Смысл: сумма путей считает встречи «лоб в лоб», разность путей — обгон; обгон случается, когда разность доросла до l.

Ответ. В момент 35-й встречи.