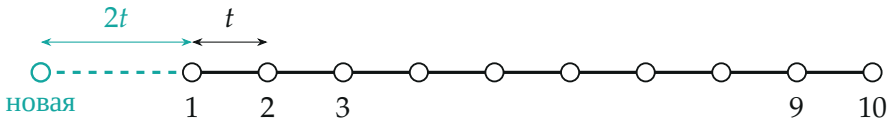
Линия метро и интервалы

Задача 2. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 8 класс, задача 2] Линия метро содержит $K = 10$ станций и обслуживается $N = 18$ поездами, которые ходят с одинаковыми интервалами. Известно, что между соседними станциями поезда движутся в течение времени $t = 3$ минуты и проводят на каждой станции время t. На конечных станциях поезда также стоят в течение времени t, а потом движутся в обратном направлении. Сколько дополнительных поездов нужно привлечь, когда на линии открыли новую конечную станцию, до которой поезда от старой конечной станции идут в течение времени $2t$, чтобы интервалы между поездами сохранились?



Поясняющий рисунок: $K = 10$ станций, перегон — время t; новая конечная станция в $2t$ от старой

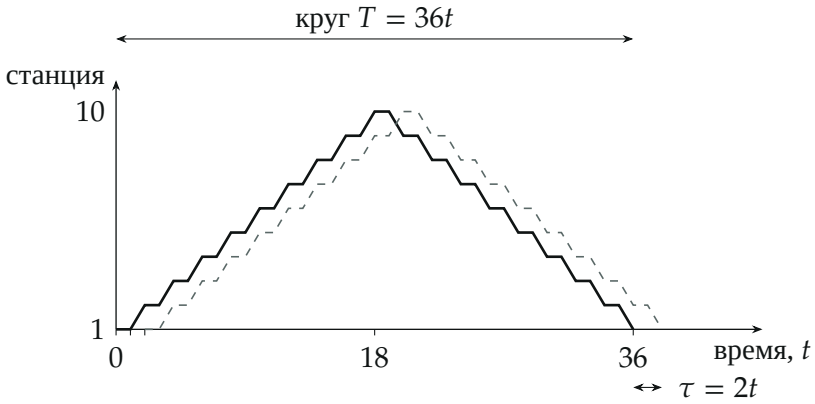
▲ **Решение.** **Что происходит.** Поезда ходят по кругу «туда-обратно» друг за другом с одинаковым интервалом τ. Если один поезд тратит на полный круг время T, а соседние поезда идут через τ, то за время T мимо любой точки проходят все поезда, и $N = T/\tau$. Новая станция удлиняет круг; при том же интервале поездов нужно больше. Класс задачи — равномерное движение по расписанию, счёт периода.

Обозначения. T и T' — время полного круга одного поезда до и после открытия станции; τ — интервал между поездами; N' — число поездов на новой линии.

1. Круг одного поезда на старой линии. Посчитаем отдельно движение и стоянки.

- Перегонов $K - 1 = 9$; туда и обратно $2(K - 1)$ перегонов по t: время в пути $2(K - 1)\,t$.
- Промежуточных станций $K - 2 = 8$, на каждой поезд стоит дважды (туда и обратно): $2(K - 2)\,t$. На двух конечных — по одному разу: $2t$. Всего стоянок $2(K - 1)\,t$.

$$T = 2(K-1)\,t + 2(K-1)\,t = 4(K-1)\,t = 36\,t = 108 \text{ мин.}$$



Номер станции от времени для одного поезда (сплошная): ступеньки — стоянки, наклонные — перегоны. Пунктир — следующий поезд, идущий через интервал τ

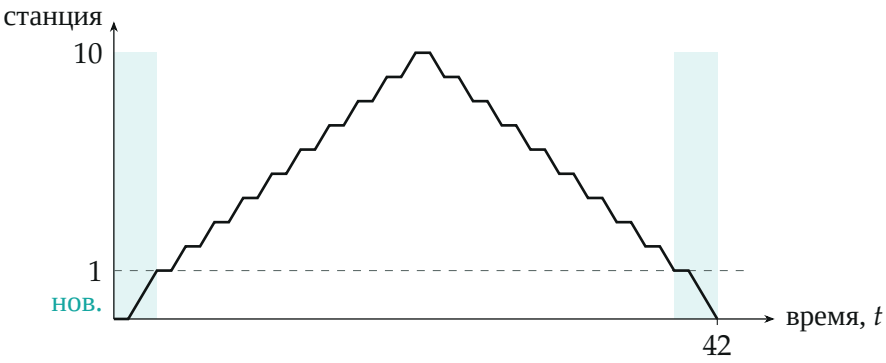
2. Интервал. Все N поездов распределены по кругу равномерно:

$$\tau = \frac{T}{N} = \frac{4(K-1)\,t}{N} = \frac{36\,t}{18} = 2t = 6 \text{ мин.}$$

3. Что добавляет новая станция. Сравним круг поезда до и после.

- Дорога до новой станции и обратно: $2t + 2t = 4t$.
- Стоянка на новой конечной: t.
- Старая конечная стала промежуточной: поезд стоит на ней теперь дважды, а не один раз, плюс t.

$$\Delta T = 4t + t + t = 6t, \qquad T' = 36\,t + 6\,t = 42\,t.$$

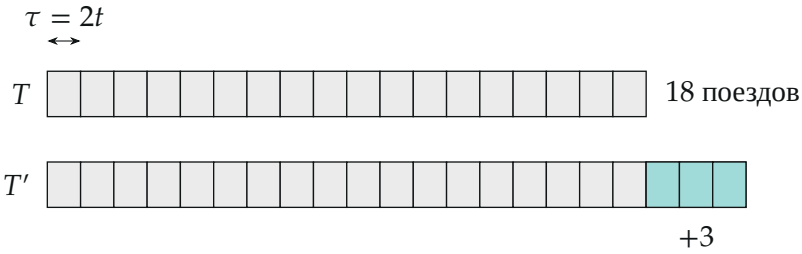


Круг поезда на новой линии: бирюзовые полосы — добавка $6t$ (начальная стоянка и путь до станции 1, лишняя стоянка на станции 1, путь обратно на новую станцию)

4. Новое число поездов. Интервал прежний, $\tau = 2t$:

$$N' = \frac{T'}{\tau} = \frac{42\,t}{2t} = 21, \qquad \Delta N = N' - N = 21 - 18 = 3.$$

В общем виде $\Delta N = \dfrac{\Delta T}{\tau} = \dfrac{6t\,N}{4(K-1)\,t} = \dfrac{3N}{2(K-1)}$.



Круг, разрезанный на интервалы $\tau = 2t$: на старой линии $36t$ — 18 клеток, на новой $42t$ — 21 клетка, на каждую клетку — один поезд

Обратите внимание. Легко забыть, что старая конечная станция стала промежуточной: на ней теперь две стоянки за круг. Без этой поправки $\Delta T = 5t$ и поездов вышло бы нецелое число 20,5 — признак ошибки.

Проверка. Целое число поездов: $42t/2t = 21$. Предел: если бы новая станция была «нулевой» (путь 0, без стоянки), круг не изменился бы

и $\Delta N = 0$; наша добавка $6t$ вся из реальных пробегов и стоянок. Размерность: ΔN — отношение времён, безразмерно; ответ не зависит от $t = 3$ мин.

Смысл: число поездов — это сколько интервалов умещается в круге одного поезда.

Ответ. Нужно добавить $\Delta N = \dfrac{3N}{2(K-1)} = 3$ поезда.