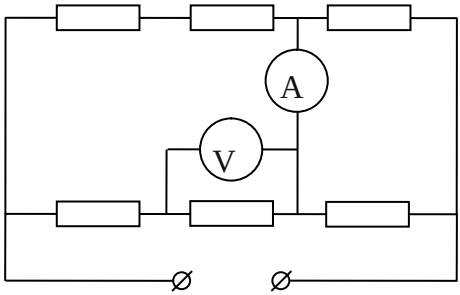
Цепь из одинаковых резисторов

Задача 3. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 8 класс, задача 3] Имеется электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке. В цепи все резисторы одинаковы и равны $R = 1$ кОм, сопротивление амперметра пренебрежимо мало. Когда к цепи прикладывают напряжение $U = 120$ В, амперметр показывает силу тока $I_A = 3$ мА. Найти показания вольтметра.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Будь вольтметр идеальным, верхняя и нижняя ветви были бы одинаковы и ток через амперметр был бы нулевым. Раз амперметр показывает 3 мА, вольтметр *неидеален*: он шунтирует средний нижний резистор, нижняя ветвь пропускает больший ток, и часть его через амперметр уходит наверх. Сопротивление вольтметра не дано — его роль играет известный ток I_A. Идеальный амперметр соединяет точки с одинаковым потенциалом: правые резисторы верхней и нижней ветвей оказываются параллельными. Класс задачи — закон Ома и законы Кирхгофа для цепи с неидеальным прибором.

Обозначения. L — левый узел (потенциал U), K — правый (потенциал 0), N — точки, соединённые амперметром, P — узел нижней ветви между первыми двумя резисторами; I_1 — ток двух левых верхних резисторов, I_2 — ток левого нижнего, I_V — ток вольтметра, I_R — ток среднего нижнего резистора, V — показание вольтметра (напряжение между P и N).

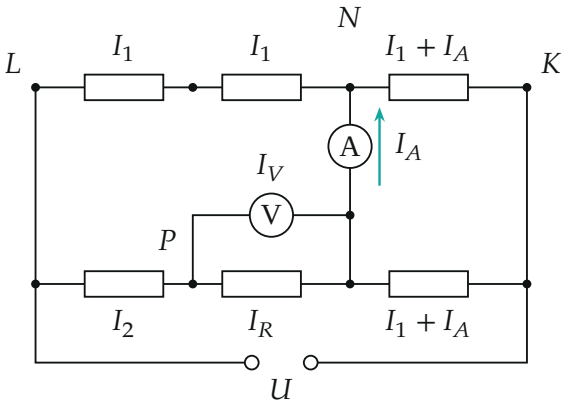
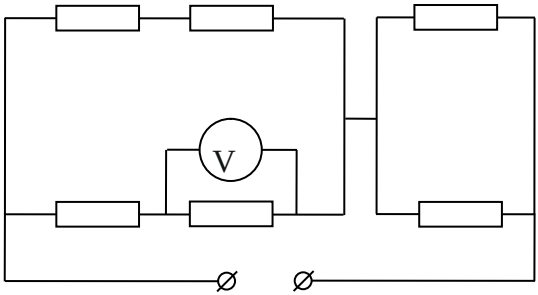


Схема с обозначениями узлов и токов; вольтметр подключён параллельно среднему нижнему резистору

1. Правые резисторы. Амперметр идеален, напряжение на нём ноль: верхняя и нижняя точки N имеют одинаковый потенциал. Тогда оба правых резистора — между N и K под одним напряжением, и по закону Ома токи в них равны. Перерисуем цепь, стянув амперметр в провод:



Эквивалентная схема: амперметр заменён проводом, правые резисторы соединены параллельно

2. Токи у амперметра. Ток в верхний правый резистор — это ток I_1, пришедший сверху, плюс ток амперметра снизу вверх (закон сохранения заряда для верхней точки N): $I_1 + I_A$. Такой же ток в нижнем правом. Тогда ток всей цепи, с одной стороны, $I_1 + I_2$, с другой — $2(I_1 + I_A)$:

$$I_1 + I_2 = 2(I_1 + I_A) \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_1 + 2I_A.$$

Нижняя ветвь действительно несёт больший ток — на $2I_A$.

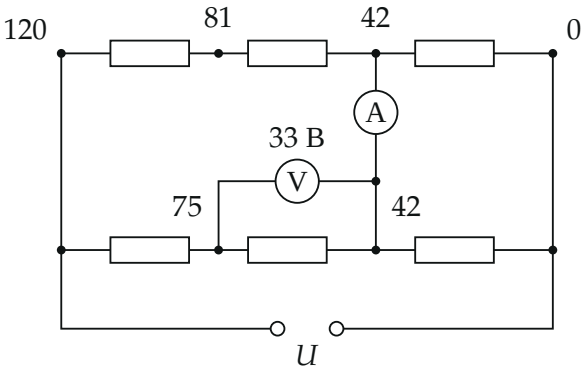
3. Верхняя ветвь от L до K: сумма напряжений на трёх резисторах равна U (второй закон Кирхгофа):

$$U = 2RI_1 + R(I_1 + I_A) \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U - I_A R}{3R} = \frac{120 - 3}{3}\ \text{мА} = 39\ \text{мА}.$$

4. Нижняя ветвь: левый резистор, затем участок PN с напряжением V, затем правый резистор:

$$U = RI_2 + V + R(I_1 + I_A) \quad \Rightarrow \quad V = U - R(2I_1 + 3I_A) = \frac{U}{3} - \frac{7}{3} I_A R.$$

Числа: $I_2 = 45$ мА, $V = 120 - 45 - 42 = 33$ В.



Потенциалы узлов в вольтах: вольтметр показывает разность $75 - 42 = 33$ В

Обратите внимание. Показание вольтметра — не 40 В, как было бы при идеальном вольтметре ($U/3$ на каждом резисторе): неидеальный вольтметр сам меняет цепь. Его сопротивление можно найти: через средний нижний резистор идёт $I_R = V/R = 33$ мА, через вольтметр — $I_V = I_2 - I_R = 12$ мА, $R_V = V/I_V = 2{,}75$ кОм.

Проверка. Потенциалы: верх $120 \to 81 \to 42 \to 0$ (падения 39, 39, 42 В), низ $120 \to 75 \to 42 \to 0$ (падения 45, 33, 42 В) — обе ветви приходят в N с одним потенциалом 42 В, как требует амперметр. Предел: при $I_A = 0$ формула даёт $V = U/3 = 40$ В — симметричная цепь.

Ответ. $V = \dfrac{U}{3} - \dfrac{7}{3} I_A R = 33$ В.