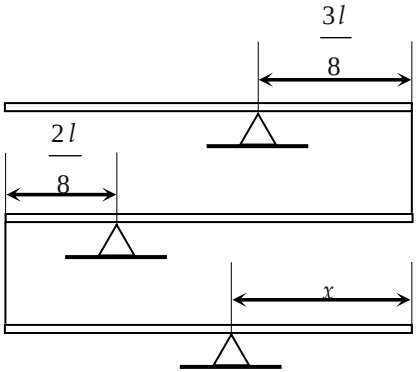
Три связанных рычага

Задача 4. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 8 класс, задача 4] Три одинаковых массивных рычага длиной l и массой m каждый расположили друг под другом и связали их концы лёгкими нерастяжимыми стержнями так, как показано на рисунке. Известно, что расстояние от опоры верхнего рычага до ближайшего конца составляет $\frac{3l}{8}$, а расстояние от опоры среднего до его ближайшего конца составляет $\frac{2l}{8}$. На каком расстоянии x от правого конца расположена опора нижнего рычага, если известно, что система рычагов находится в равновесии? На левый конец верхнего рычага положили точечное тело с массой, равной массе рычага m. Тело какой массы нужно положить на правый конец нижнего рычага, чтобы равновесие системы сохранилось?



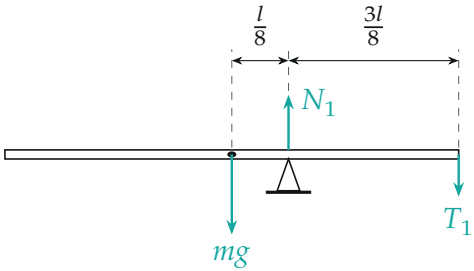
▲ **Решение. Что происходит.** Каждый рычаг — твёрдое тело на опоре, для него работает правило моментов. Рычаги связаны стержнями, а лёгкий стержень передаёт силу вдоль себя: если он тянет нижний конец верхнего рычага вниз, то тянет верхний конец следующего рычага вверх, с той же силой (третий закон Ньютона). Поэтому идём сверху вниз: из равновесия верхнего рычага находим силу в правом стержне, из равновесия среднего — силу в левом, а нижний рычаг подсказывает, где его опора. Класс задачи — равновесие системы рычагов, правило моментов.

Обозначения. T_1 — сила, с которой правый стержень действует на верхний рычаг (вниз, если стержень растянут); T_2 — сила, с которой левый стержень действует на средний рычаг (вверх, если стержень сжат); моменты считаем относительно опоры каждого рычага. Сила тяжести рычага mg приложена к его середине.

1. Верхний рычаг. Опора делит его на части $\frac{5}{8}l$ (слева) и $\frac{3}{8}l$ (справа). Середина рычага левее опоры на $\frac{5}{8}l - \frac{l}{2} = \frac{l}{8}$. Сила тяжести поворачивает рычаг левым концом вниз; удержать его может только стержень, тянущий правый конец вниз. Правило моментов относительно опоры:

$$mg \cdot \frac{l}{8} = T_1 \cdot \frac{3l}{8} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{mg}{3}.$$

Правый стержень растянут.

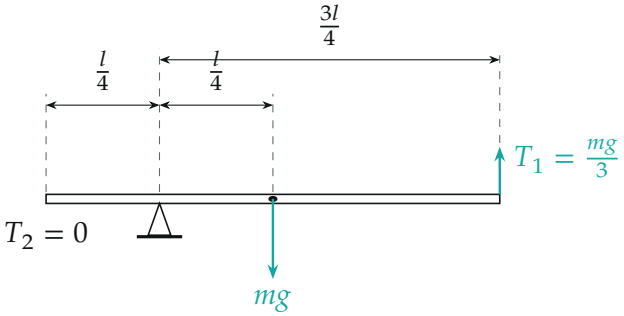


Силы на верхний рычаг: тяжесть mg в середине, натяжение правого стержня T_1, реакция опоры N_1

2. Средний рычаг. Опора делит его на $\frac{1}{4}l$ (слева) и $\frac{3}{4}l$ (справа); середина правее опоры на $\frac{l}{4}$. Растянутый правый стержень тянет правый конец среднего рычага вверх с силой T_1. Пусть левый стержень давит на левый конец вверх с силой T_2. Правило моментов относительно опоры (против часовой стрелки — со знаком «+»):

$$T_1 \cdot \frac{3l}{4} - mg \cdot \frac{l}{4} - T_2 \cdot \frac{l}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 3T_1 - mg = 0.$$

Момент силы тяжести среднего рычага в точности уравновешен стержнем: левый стержень не нагружен.



Средний рычаг: стержень тянет правый конец вверх с силой $\frac{mg}{3}$, её момент равен моменту тяжести — левому стержню делать нечего

3. Нижний рычаг. Стержень на левом конце не действует, на рычаг давят только сила тяжести (в середине) и опора. Правило моментов выполняется, только если опора под серединой:

$$x = \frac{l}{2}.$$

4. Положили тело m на левый конец верхнего рычага. Новая сила в правом стержне T_1'. Правило моментов для верхнего рычага, плечо тела $\frac{5}{8}l$:

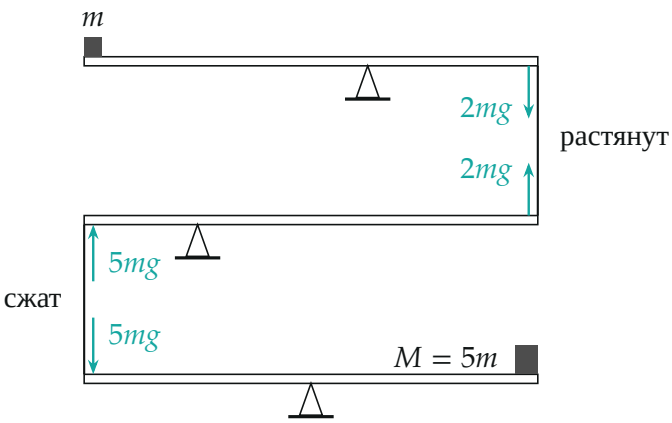
$$mg \cdot \frac{5l}{8} + mg \cdot \frac{l}{8} = T_1' \cdot \frac{3l}{8} \quad \Rightarrow \quad T_1' = 2mg.$$

Средний рычаг (левый стержень теперь давит на него вверх с силой T_2'):

$$T_1' \cdot \frac{3l}{4} - mg \cdot \frac{l}{4} - T_2' \cdot \frac{l}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2' = 3T_1' - mg = 5mg.$$

$T_2' > 0$: левый стержень сжат, давит на средний рычаг вверх, а на нижний — вниз с силой $5mg$. Нижний рычаг (опора посередине, плечи по $\frac{l}{2}$): на правый конец нужно тело массой M с

$$Mg \cdot \frac{l}{2} = 5mg \cdot \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad M = 5m.$$



После того как положили тело m: правый стержень растянут силой $2mg$, левый сжат силой $5mg$ и давит на левый конец нижнего рычага вниз

Обратите внимание. Знак силы в стержне заранее неизвестен: стержень может тянуть или толкать. Мы предположили направление и проверили знак ответа: в равновесии без грузов $T_2 = 0$, с грузом $T_2' = 5mg > 0$, то есть левый стержень сжат.

Проверка. Размерность: силы — в mg, массы — в m. Второй способ для пункта 4 — через добавки: тело m добавляет в правый стержень $\Delta T_1 = mg \cdot \frac{5/8}{3/8} = \frac{5}{3}mg$ (итого $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2$, в единицах mg), средний рычаг усиливает её в отношении плеч $\frac{3l/4}{l/4} = 3$: $\Delta T_2 = 5mg$, нижний рычаг с опорой в середине переносит её на правый конец один к одному: $M = 5m$. Сошлось.

Смысл: каждый рычаг — «усилитель» с коэффициентом, равным отношению плеч; тело m сверху превращается в $5m$ внизу.

Ответ. $x = \dfrac{l}{2}$; на правый конец нижнего рычага нужно положить тело массой $5m$.