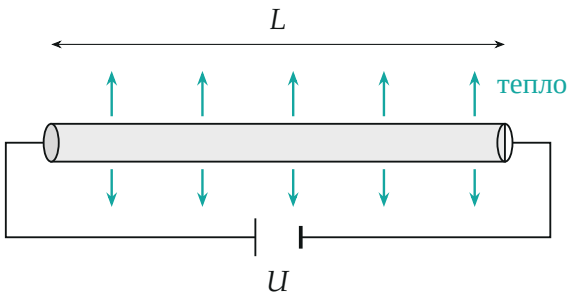
Нагрев проводника током

Задача 5. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 8 класс, задача 5] Источник постоянного электрического напряжения приложили к прямому цилиндрическому проводнику и пропустили через проводник электрический ток. В результате температура проводника увеличилась на $\Delta t = 10\,^\circ\mathrm{C}$ и далее не возрастала. На сколько ещё увеличится температура проводника, если его укоротить на одну четверть и приложить к нему тот же самый источник постоянного напряжения? Изменением удельного сопротивления материала проводника при нагревании пренебречь. *Указание*. Мощность теплопотерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, площади контакта между телом и средой, и зависит от геометрии тела, наличия теплоизоляции и т. д. (закон Ньютона–Рихмана).



Поясняющий рисунок: ток греет проводник, тепло уходит в воздух через боковую поверхность

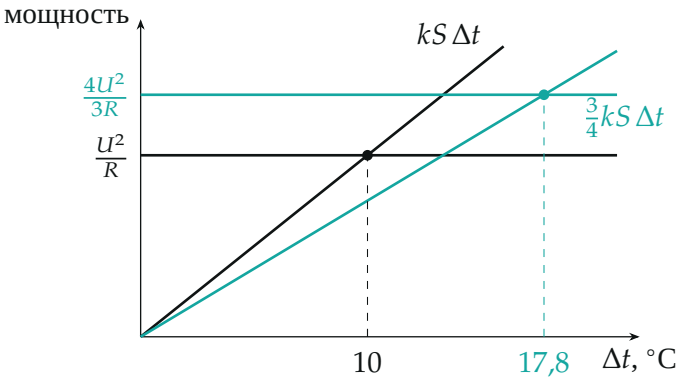
▲ **Решение. Что происходит.** Ток выделяет в проводнике тепло, проводник греется, и чем он горячее, тем больше тепла отдаёт воздуху. Температура перестаёт расти, когда отдача тепла сравнялась с выделением: установилось тепловое равновесие. Укороченный проводник имеет меньшее сопротивление — при том же напряжении ток и мощность больше, а поверхность, через которую уходит тепло, меньше. Оба эффекта поднимают температуру. Класс задачи — установившийся тепловой режим (баланс мощностей).

Обозначения. U — напряжение источника; L, R, S — длина, сопротивление и площадь боковой поверхности проводника; k — коэффициент в законе Ньютона–Рихмана; Δt и $\Delta t'$ — превышение температуры проводника над температурой воздуха в первом и втором опытах.

1. Баланс мощностей. В установившемся режиме мощность тока (закон Джоуля–Ленца при заданном напряжении) равна мощности потерь (закон Ньютона–Рихмана из указания):

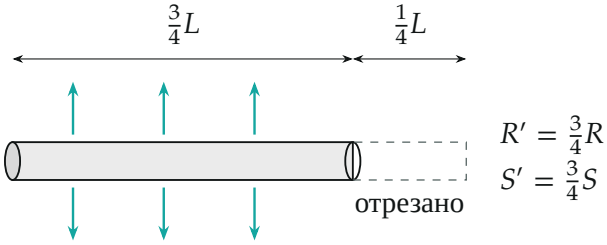
$$\frac{U^2}{R} = kS\,\Delta t.$$

Теплом через торцы пренебрегаем: проводник длинный, торцы малы по сравнению с боковой поверхностью.



Горизонтали — мощность тока, наклонные — мощность потерь; температура устанавливается в точке пересечения. Чёрное — целый проводник, бирюза — укороченный

2. Что меняет укорачивание. Сопротивление цилиндрического проводника $R = \rho\frac{L}{s}$ (сечение s не меняется) пропорционально длине: $R' = \frac{3}{4}R$. Боковая поверхность $S = 2\pi rL$ тоже пропорциональна длине: $S' = \frac{3}{4}S$. Коэффициент k прежний: тот же материал, та же форма, нет новой теплоизоляции.



Отрезали четверть: сопротивление и поверхность уменьшились в одно и то же число раз

3. Баланс для укороченного проводника при том же U:

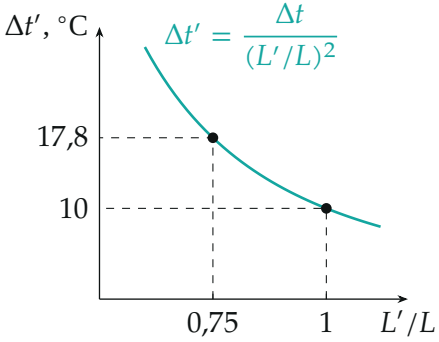
$$\frac{U^2}{\frac{3}{4}R} = k \cdot \frac{3}{4} S\,\Delta t'.$$

Разделим это уравнение на уравнение пункта 1:

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Delta t = \frac{16}{9} \cdot 10^\circ\text{C} \approx 17{,}8^\circ\text{C}.$$

4. На сколько ещё нагреется. Температура вырастет сверх прежней на

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{7}{9}\,\Delta t \approx 7{,}8^\circ\text{C}.$$



Установившийся перегрев обратно пропорционален квадрату длины проводника

Обратите внимание. Спрашивают, на сколько температура увеличится *ещё*, то есть сверх уже достигнутых 10°: ответ 7,8°, а не 17,8°. И нельзя учитывать только рост мощности (тогда вышло бы $\frac{4}{3}\cdot 10 \approx 13{,}3°$): поверхность охлаждения тоже уменьшилась.

Проверка. Размерность: $\Delta t'$ выражено через Δt безразмерным множителем. Общая формула $\Delta t = \dfrac{U^2}{kRS} \propto \dfrac{1}{L\cdot L} = \dfrac{1}{L^2}$: длиннее проводник — слабее нагрев, в пределе очень длинного проводника перегрев стремится к нулю, как и должно быть.

Смысл: укорачивание бьёт дважды — мощность растёт в $\frac{4}{3}$ раза и во столько же раз падает отвод тепла, перегрев растёт в $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ раза.

Ответ. Ещё на $\Delta t' - \Delta t = \dfrac{7}{9}\,\Delta t \approx 7{,}8\,^\circ\mathrm{C}$ (всего перегрев станет $\frac{16}{9}\cdot 10 \approx 17{,}8\,^\circ\mathrm{C}$).