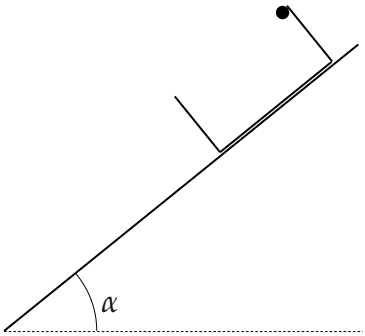
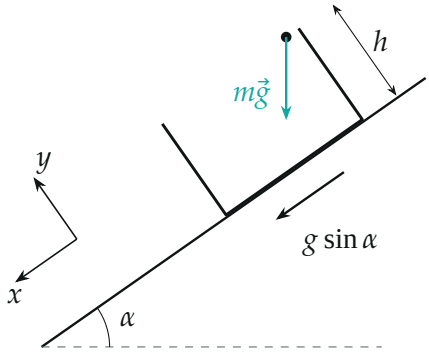
Шарик падает в скользящей коробке

Задача 5. [Росатом 2022/23, заключительный этап, 9 класс, задача 5] На очень длинной гладкой наклонной плоскости с углом наклона α удерживают прямоугольную коробку высотой h. В некоторый момент времени коробку отпускают, и она начинает скользить по плоскости. В этот же момент от верхнего края коробки начинает падать маленький упругий шарик (см. рис.). Какой путь пройдёт коробка по плоскости к моменту 6-го удара шарика о её дно? Столкновения шарика с дном коробки упругие.



▲ **Решение. Что происходит.** Коробка скользит по гладкой плоскости с ускорением $g\sin\alpha$ вдоль неё. Шарик падает свободно с ускорением $\vec{g}$, и *вдоль* плоскости у него точно такое же ускорение $g\sin\alpha$, а начальные скорости у обоих нулевые. Значит, вдоль плоскости шарик и коробка движутся одинаково: шарик всё время над одной и той же точкой дна, и вся «жизнь» шарика относительно коробки — прыжки перпендикулярно дну с ускорением $g\cos\alpha$. Класс задачи — движение с постоянным ускорением, разложенное по двум осям (наклонная плоскость).

Обозначения. Ось x — вдоль плоскости вниз, ось y — перпендикулярно плоскости вверх; t_1 — время до первого удара; T — время между соседними ударами; t_6 — момент шестого удара; S — путь коробки.

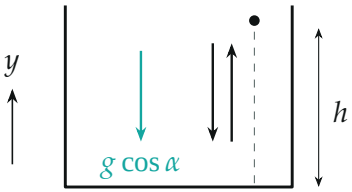


Силы и оси: на шарик действует только $m\vec{g}$, коробка скользит вдоль гладкой плоскости с ускорением $g \sin\alpha$

1. Ускорения вдоль осей. На коробку действуют сила тяжести и сила нормальной реакции плоскости (трения нет). Второй закон Ньютона для коробки в проекции на ось x: $Ma_x = Mg\sin\alpha$, то есть $a_к = g\sin\alpha$. На шарик между ударами действует только сила тяжести, поэтому его ускорение $\vec{g}$; проекции

$$a_x = g\sin\alpha, \qquad a_y = -g\cos\alpha.$$

Вдоль x ускорения шарика и коробки равны, начальные скорости равны нулю. Удар о дно направлен по нормали к дну (по оси y) и x-скорость шарика не меняет. Поэтому по оси x шарик и коробка движутся одинаково всё время: шарик прыгает строго перпендикулярно дну.



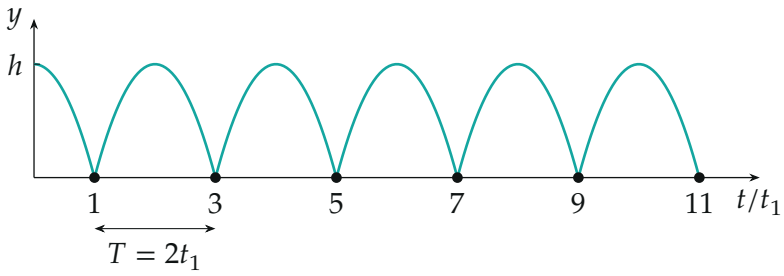
В системе отсчёта коробки шарик падает и подпрыгивает строго по нормали к дну с ускорением $g\cos\alpha$: всё как в лифте, где «сила тяжести» ослаблена до $g\cos\alpha$

2. Время первого удара. Движение по оси y относительно дна — равноускоренное без начальной скорости, высота h:

$$h = \frac{g\cos\alpha\, t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}.$$

3. Время между ударами. Перед ударом y-скорость шарика $v_y = -g\cos\alpha\, t_1$. Удар упругий, дно движется вдоль оси x и по y неподвижно — шарик отскакивает со скоростью $+g\cos\alpha\, t_1$, поднимается до высоты h за время t_1 и за такое же время падает обратно. Значит, между соседними ударами

$$T = 2t_1.$$



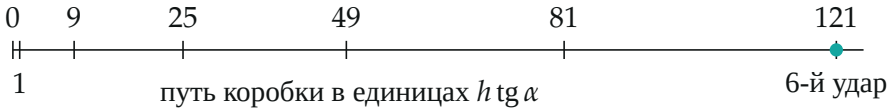
Высота шарика над дном: удары (точки) в моменты t_1, $3t_1$, $5t_1$, … , $11t_1$

4. Момент шестого удара. До первого удара проходит t_1, дальше пять промежутков T:

$$t_6 = t_1 + 5\cdot 2t_1 = 11\,t_1 = 11\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}.$$

5. Путь коробки. Коробка движется равноускоренно вдоль плоскости без начальной скорости с ускорением $g\sin\alpha$:

$$S = \frac{g\sin\alpha\, t_6^2}{2} = \frac{g\sin\alpha}{2}\cdot\frac{121\cdot 2h}{g\cos\alpha} = 121\,h\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$



Где коробка в моменты ударов: путь растёт как квадрат времени, $(2k-1)^2\,h\operatorname{tg}\alpha$ к k-му удару

Обратите внимание. Время до первого удара — половина промежутка между ударами: шарик стартует с верхней точки без скорости, а не с дна. Поэтому до шестого удара $11t_1$, а не $12t_1$.

Проверка. Размерность: $[h\operatorname{tg}\alpha] =$ м. Предел $\alpha \to 0$: коробка стоит на горизонтальной плоскости, $S \to 0$ — верно. Второй способ через путь к первому удару: $S_1 = \dfrac{g\sin\alpha\, t_1^2}{2} = h\operatorname{tg}\alpha$, а $t_6 = 11t_1$, поэтому $S = 11^2 S_1 = 121\,h\operatorname{tg}\alpha$.

Смысл: относительно коробки шарик просто прыгает вверх-вниз, а коробка за это время уезжает по закону t^2.

Ответ. $S = 121\,h\operatorname{tg}\alpha$.