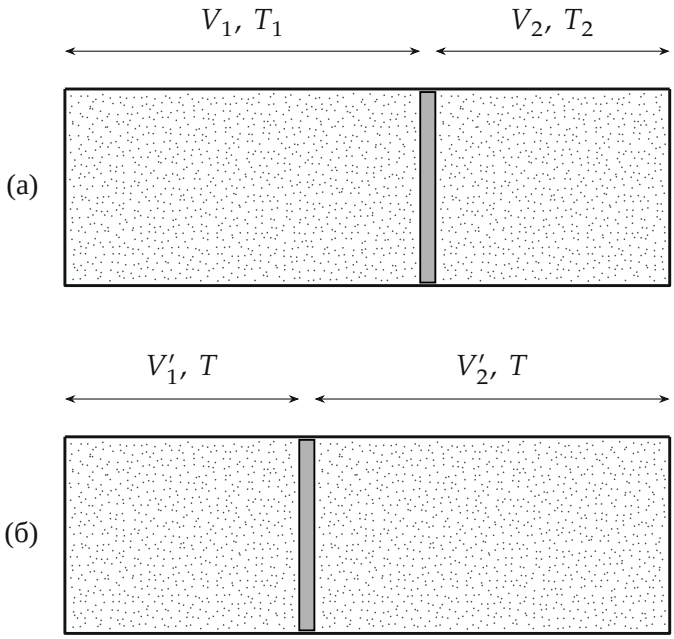
Газ по две стороны поршня

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 1] Горизонтальный цилиндрический сосуд с идеальным газом разделен подвижным поршнем на две части. Газ в левой части имеет температуру T_1, в правой — температуру T_2. При этом отношение объемов оказывается равным $V_1/V_2 = 3/2$. После того как температуры выровнялись, соотношение объемов изменилось: $V_1'/V_2' = 2/3$. Найти отношение температур T_1/T_2.



Поясняющий рисунок. (а) Начальное состояние: левая часть имеет температуру T_1 и объём V_1, правая — T_2 и V_2, $V_1/V_2 = 3/2$. (б) После выравнивания температур: общая температура T, $V_1'/V_2' = 2/3$

▲ **Решение. Что происходит.** Поршень подвижный и скользит свободно, поэтому он стоит там, где давления слева и справа равны. Сначала температуры разные, потом одинаковые, а количество газа в каждой части не меняется — поршень газ не пропускает. Главная идея: отношение

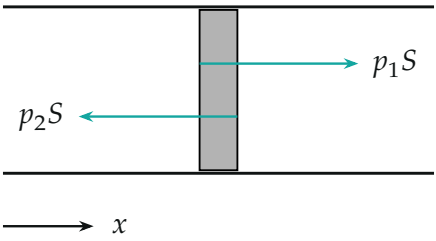
количеств вещества ν_1/ν_2 можно найти из состояния «после», где температуры одинаковы, и из состояния «до»; приравняв результаты, получим искомое отношение температур. Ни давление, ни общую температуру знать не нужно. Класс задачи — газ по обе стороны подвижной перегородки, сравнение двух состояний.

Обозначения. ν_1, ν_2 — количество вещества слева и справа; p и p' — давление газа (слева и справа одно и то же) до и после; S — сечение сосуда; T — общая температура после выравнивания; штрихом отмечены величины после выравнивания.

1. Условие равновесия поршня. Горизонтальные силы на поршень — давления газа слева и справа: p_1S вправо и p_2S влево. Поршень в равновесии (в обоих состояниях), поэтому

$$p_1S = p_2S \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2.$$

Масса поршня и сила тяжести в горизонтальном сосуде на это условие не влияют.



Силы на поршень в горизонтальном сосуде: p_1S слева и p_2S справа равны по модулю, поэтому $p_1 = p_2$

2. Состояние до выравнивания. Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для газа в каждой части при общем давлении p:

$$pV_1 = \nu_1 RT_1, \qquad pV_2 = \nu_2 RT_2.$$

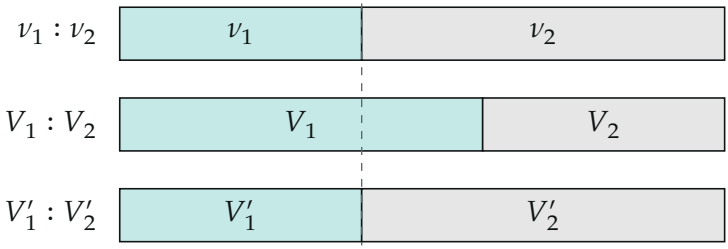
Разделим первое равенство на второе — давление p сократится:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}.$$

3. Состояние после выравнивания. Температуры стали одинаковыми и равны T; общее давление p'. Количества вещества прежние (ν_1 и ν_2 — поршень газ не пропускает):

$$p'V_1' = \nu_1 RT, \qquad p'V_2' = \nu_2 RT \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{V_1'}{V_2'}.$$

Здесь сократились p', R и T. Поэтому не важно, сколько тепла ушло из сосуда, а температура T не нужна.



Отношение $\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$ совпадает с $V_1' : V_2'$ (температуры равны), но не с $V_1 : V_2 = 3 : 2$ (температуры разные). Пунктир — граница полоски ν_1

4. Отношение температур. Приравняем ν_1/ν_2 из п. 2 и п. 3:

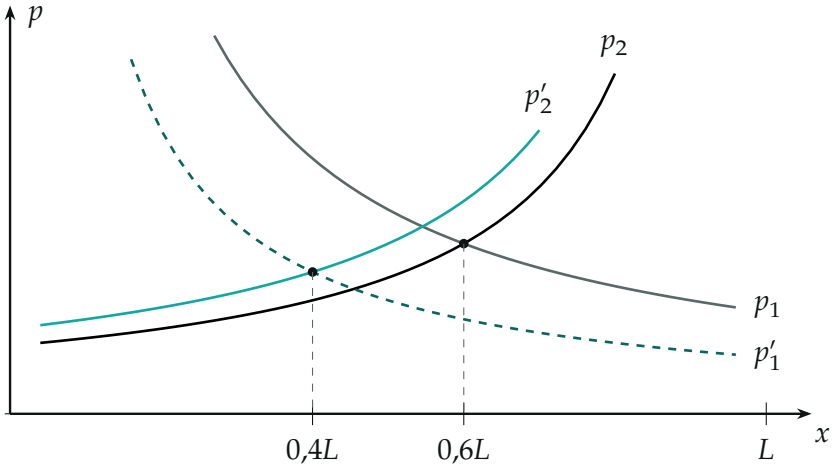
$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1'}{V_2'} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1/V_2}{V_1'/V_2'} = \frac{3/2}{2/3} = \frac{9}{4}.$$

Из п. 3 следует $\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$: слева газа меньше, чем справа, но он горячее, поэтому давления одинаковы только при большем объёме слева.

Обратите внимание: температура T после выравнивания в ответ не входит, поэтому задача решается и при потере энергии (теплопроводность стенок), и без неё.

Второй способ — положение поршня. Длину сосуда примем за L, положение поршня x (от левой стенки), тогда $V_1 = Sx$, $V_2 = S(L - x)$, и условие равновесия даёт $\nu_1 RT_1/x = \nu_2 RT_2/(L - x)$. Возьмём числа $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$ (из п. 3), $T_2 = 4$, $T_1 = 9$ в условных единицах: давления $p_1 \propto 18/x, p_2 \propto 12/(L-x)$ пересекаются при $x = 0{,}6L$ (то есть $V_1/V_2 =$

$3/2$ — как в условии). После выравнивания, например, при $T = 5$ имеем $p_1' \propto 10/x$, $p_2' \propto 15/(L-x)$, и пересечение при $x = 0{,}4L$ ($V_1'/V_2' = 2/3$). Условие $V_1/V_2 = 3/2$ при $T_1/T_2 = 9/4$ выполняется — это и есть проверка ответа.



Зависимость давления газа в каждой части от положения поршня x при $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$ (в условных единицах): $p_1 = \nu_1 RT_1/(Sx)$, $p_2 = \nu_2 RT_2/(S(L-x))$ для $T_1 = 9$, $T_2 = 4$ (серая и чёрная) и p_1', p_2' при общей $T = 5$ (бирюзовые). Пересечения — положения равновесия: $x = 0{,}6L$ и $x = 0{,}4L$

Проверка. Размерность: ответ — отношение температур, безразмерно. Предел: при $T_1 = T_2$ из формулы $V_1'/V_2' = V_1/V_2$ — поршень не сдвигается, как и должно быть. Знак: $T_1 > T_2$, и при выравнивании поршень сместился влево (левая часть стала меньше), то есть горячий газ слева сжался, холодный справа расширился — это согласуется с тем, что левая часть была горячее.

Ответ. $T_1/T_2 = \dfrac{9}{4}$.