# Треугольник на шарнире

**Задача 3.** [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Из листа фанеры вырезан плоский равнобедренный треугольник, стороны которого относятся как 1:2. Треугольник шарнирно прикреплен за вершину к горизонтальному потолку. Какой минимальной силой нужно действовать на треугольник, чтобы одна из его боковых сторон была вертикальна (см. рисунок)?

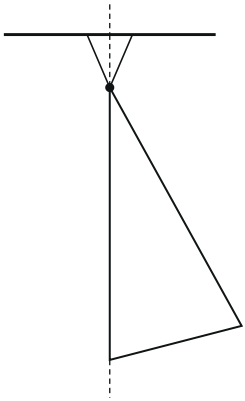


*Рисунок условия. Треугольник подвешен за вершину на шарнире; пунктиром проведена вертикаль через шарнир, боковая сторона лежит вдоль неё*

▲ **Решение. Что происходит.** Если ничего не придерживает треугольник, он поворачивается вокруг шарнира так, чтобы центр тяжести оказался под шарниром. Чтобы боковая сторона осталась вертикальной, нужна внешняя сила: момент силы тяжести относительно шарнира уравновешивается моментом этой силы. Реакция шарнира нам неизвестна и по модулю, и по направлению, но моментов относительно шарнира у неё нет — поэтому уравнение моментов пишем именно относительно него. Чтобы сила была минимальной, нужно наибольшее плечо: приложить её в самой далёкой от шарнира точке перпендикулярно прямой, соединяющей эту точку с шарниром. Класс задачи — правило моментов для тела с неподвижной осью и выбор плеча, дающий минимум силы.

**Обозначения.** Стороны относятся как 1:2; так как треугольник с боковыми сторонами 1 и основанием 2 не существует ($1 + 1 = 2$), основание

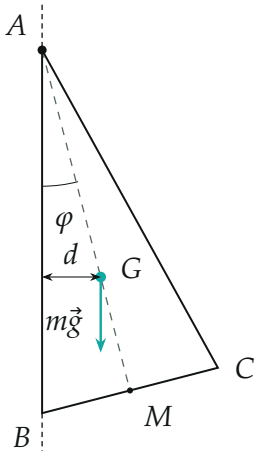
вдвое меньше боковой стороны: основание $BC = a$, боковые стороны $AB = AC = 2a$. Шарнир — вершина $A$, в которой сходятся боковые стороны; сторона $AB$ вертикальна. $m$ — масса, $G$ — центр тяжести, $M$ — середина $BC$, $d$ — плечо силы тяжести относительно $A$ (расстояние от $A$ до вертикали, проходящей через $G$), $F$ — искомая сила, $\ell$ — её плечо.

**1. Плечо силы тяжести.** Лист однородный, поэтому сила тяжести приложена к точке пересечения медиан $G$, которая делит медиану $AM$ в отношении 2:1, считая от вершины $A$. Медиана к основанию равнобедренного треугольника перпендикулярна ему, и по теореме Пифагора

$$AM = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a, \qquad AG = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{15}}{3}a.$$

Угол $\varphi$ между медианой $AM$ и вертикальной стороной $AB$ найдём из прямоугольного треугольника $ABM$: $\sin\varphi = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{a/2}{2a} = \dfrac{1}{4}$. Плечо силы тяжести — горизонтальное расстояние от $G$ до вертикали $AB$:

$$d = AG\sin\varphi = \frac{\sqrt{15}}{3}a \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{12}a.$$




*Центр тяжести $G$ — на медиане $AM$, на $2/3$ её длины от $A$; $\sin\varphi = 1/4$; $d$ — плечо силы тяжести $m\vec{g}$*

**2. Условие равновесия.** Треугольник в равновесии, поэтому сумма моментов сил относительно любой точки равна нулю; возьмём шарнир $A$. Реакция шарнира проходит через $A$ и момента не создаёт. Сила тяжести стремится повернуть треугольник так, чтобы $G$ оказался под шарниром (по часовой стрелке на рисунке), сила $\vec{F}$ должна поворачивать в другую сторону. Модули моментов равны:

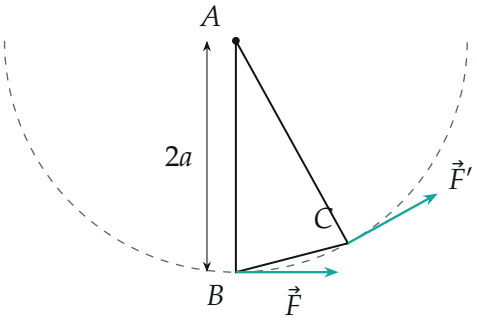
$$mg\,d = F\,\ell \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg\,d}{\ell}.$$

Сила тем меньше, чем больше плечо $\ell$.

**3. Наибольшее плечо.** Плечо силы не больше расстояния от шарнира до точки приложения силы (плечо — перпендикуляр к линии действия, а он короче любого отрезка от $A$ до точки на этой линии). Точка приложения лежит на листе, а самые удалённые от $A$ точки треугольника — вершины $B$ и $C$, до каждой из них $2a$. Значит,

$$\ell \le 2a, \qquad F \ge \frac{mg\,d}{2a}.$$

Равенство достигается, когда сила приложена в вершине $B$ (или $C$) и перпендикулярна радиусу $AB$ (или $AC$). В вершине $B$ это горизонтальная сила, направленная вправо (в ту сторону, куда смещён центр тяжести от вертикали).

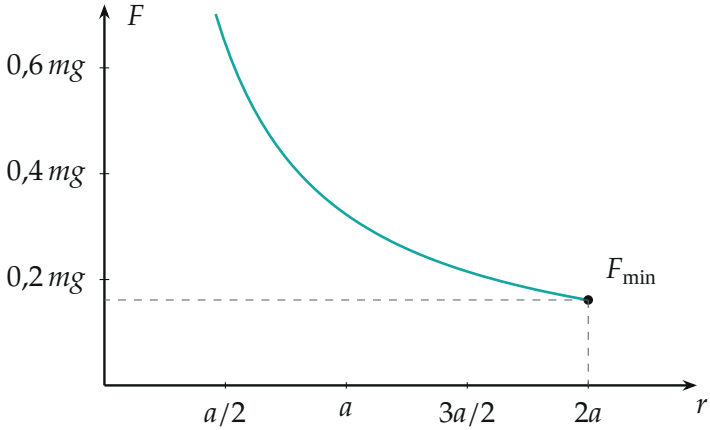



*Все точки внутри окружности радиуса $2a$ (пунктир), $B$ и $C$ — на ней; $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ перпендикулярны радиусам*

Обратите внимание: сила, приложенная в *любой другой* точке или под *другим* углом, должна быть больше: меньше плечо. Равенство $F = mg\,d/\ell$ даёт это сразу.

**4. Ответ.** Подставим $d$:

$$F_{\min} = \frac{mg\,d}{2a} = mg \cdot \frac{\sqrt{15}\,a/12}{2a} = \frac{\sqrt{15}}{24}\,mg \approx 0{,}16\,mg.$$




*Минимальная сила, необходимая при приложении перпендикулярно радиусу в точке на расстоянии $r$ от шарнира: $F = mg\,d/r$ с $d = \frac{\sqrt{15}}{12}a$. Наименьшее значение — при наибольшем возможном $r = 2a$*

**Второй способ — координаты.** Поместим начало в шарнир $A$, ось вниз — вдоль $AB$, ось вправо — горизонтальная. Тогда $A = (0;0)$, $B = (0;\,-2a)$. Вершина $C$ находится на расстоянии $2a$ от $A$ и $a$ от $B$: из $x^2 + y^2 = 4a^2$ и $x^2 + (y + 2a)^2 = a^2$ получаем $y = -\frac{7}{4}a$, $x = \frac{\sqrt{15}}{4}a$. Центр тяжести однородного треугольника — среднее арифметическое координат вершин, поэтому горизонтальная координата $G$ равна

$$x_G = \frac{0 + 0 + \sqrt{15}\,a/4}{3} = \frac{\sqrt{15}}{12}\,a = d,$$

что совпадает с результатом п. 1 и не использует угол $\varphi$.

**Проверка.** Размерность: сила, $F \sim mg$. Предельный случай: если бы центр тяжести лежал на вертикали $AB$ ($d = 0$), сила не понадобилась бы — формула даёт $F = 0$. Оценка: плечо силы тяжести $d \approx 0{,}32\,a$ в 6,2 раза меньше плеча $2a$, поэтому сила в 6,2 раза меньше веса: $F \approx 0{,}16\,mg$. Физический смысл: удерживая треугольник за самую далёкую от шарнира точку, мы получаем наибольший выигрыш в силе.

**Ответ.** $F_{\min} = \dfrac{\sqrt{15}}{24}\,mg \approx 0{,}16\,mg$; сила приложена в нижней вершине вертикальной стороны горизонтально, в ту сторону, куда смещён центр тяжести (вправо на рисунке).