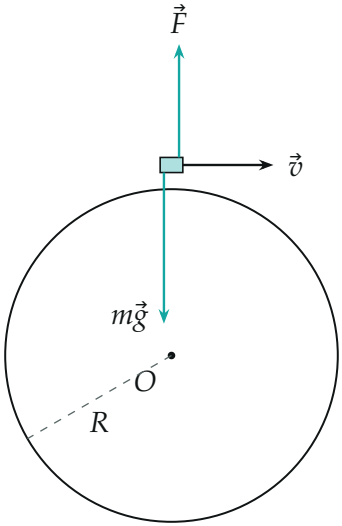
Спутник с двигателем

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Искусственный спутник некоторой планеты движется с включенным двигателем на очень малой высоте над ее поверхностью со скоростью, которая вдвое меньше первой космической скорости для данной планеты. Чему равна и куда направлена сила тяги, которую развивают двигатели спутника? Масса спутника m, ускорение свободного падения на поверхности планеты равно g.



Поясняющий рисунок. Спутник на круговой орбите радиуса R (высота мала, поэтому орбита почти совпадает с поверхностью планеты). На спутник действуют сила тяжести $m\vec{g}$ к центру O и сила тяги $\vec{F}$; скорость $\vec{v}$ направлена по касательной

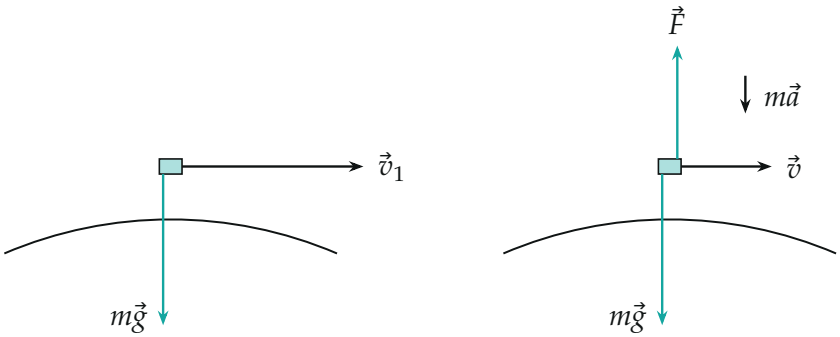
▲ **Решение. Что происходит.** Спутник движется по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью, поэтому его ускорение направлено к центру планеты и равно v^2/R. Если бы скорость была равна первой космической, этого ускорения как раз хватало бы за счёт одной силы тяжести. Скорость меньше, значит, нужное ускорение меньше, чем даёт сила тяжести, и двигатель должен убрать лишнее: тяга направлена

от центра планеты. Главная идея: записать второй закон Ньютона для движения по окружности в проекции на радиус и воспользоваться тем, что первая космическая скорость — это скорость при отсутствии тяги. Класс задачи — движение по окружности под действием нескольких сил.

Обозначения. R — радиус планеты (высота орбиты мала, поэтому радиус орбиты $\approx R$, а ускорение свободного падения на орбите равно g); v — скорость спутника; v_1 — первая космическая скорость; F — модуль силы тяги, направленной от центра планеты (если получится отрицательное значение, тяга направлена к центру). Ось направим к центру планеты: на ней лежат ускорение и обе силы.

1. Первая космическая скорость. Так называют скорость спутника на малой высоте при выключенном двигателе: тогда единственная сила — тяжесть, и она создаёт центростремительное ускорение:

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = gR.$$



(а) $v = v_1$, тяги нет (б) $v = v_1/2$, двигатель работает

(а) При скорости v_1 тяги нет: сила тяжести равна mv_1^2/R. (б) При скорости $v_1/2$ нужна равнодействующая $m\vec{a}$ вчетверо меньше $m\vec{g}$, длины стрелок — по модулю: $mg : F : ma = 4 : 3 : 1$

2. Второй закон Ньютона с включённым двигателем. Скорость постоянна по модулю, значит, касательной составляющей у равнодействующей нет, и тяга направлена вдоль радиуса. В проекции на ось к центру (тяжесть $+mg$, тяга $-F$):

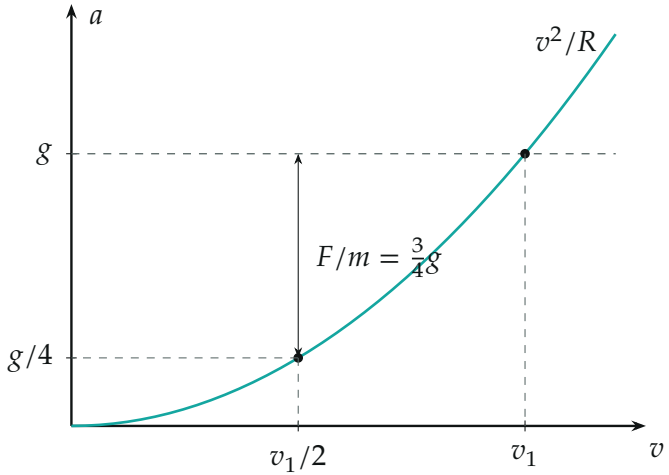
$$\frac{mv^2}{R} = mg - F.$$

Обратите внимание: это уравнение верно именно при равномерном движении по окружности; будь у тяги касательная составляющая, скорость менялась бы.

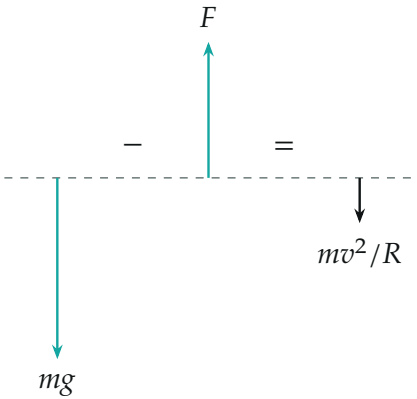
3. Подставим скорость. По условию $v = v_1/2$, поэтому $v^2 = v_1^2/4 = gR/4$:

$$\frac{m\,gR/4}{R} = mg - F \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{4} = mg - F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3}{4}mg.$$

Значение положительное, значит, предположение верно: сила тяги направлена *от* центра планеты, вертикально вверх.



Необходимое центростремительное ускорение $a = v^2/R$ (парабола) и ускорение силы тяжести g (пунктир). При $v = v_1/2$ парабола проходит на уровне $g/4$, а недостающая до g часть — $\frac{3}{4}g$ — приходится на тягу



Баланс сил вдоль радиуса: сила тяжести mg (к центру) минус тяга F (от центра) даёт равнодействующую $mv^2/R = mg/4$. Длины стрелок — 4 : 3 : 1

Второй способ — зависимость тяги от скорости. Из уравнения п. 2 при любом v получаем

$$F = mg - \frac{mv^2}{R} = mg\left(1 - \frac{v^2}{v_1^2}\right).$$

При $v = 0$ имеем $F = mg$ (двигатель просто удерживает аппарат над планетой), при $v = v_1$ имеем $F = 0$ (орбитальное движение без тяги) — оба предельных случая понятны без вычислений. При $v = v_1/2$ получаем $F = \frac{3}{4}mg$, как и выше.

Проверка. Размерность: mg — сила. Физический смысл: сила тяги составляет три четверти веса спутника, потому что орбитальной скорости не хватает: четвёртая часть силы тяжести идёт на искривление траектории, остальное должна компенсировать тяга. Знак: тяга направлена вверх — спутник частично «подвешен» двигателем, а не движется по свободной траектории.

Ответ. $F = \frac{3}{4}mg$, сила тяги направлена вертикально вверх, от центра планеты.