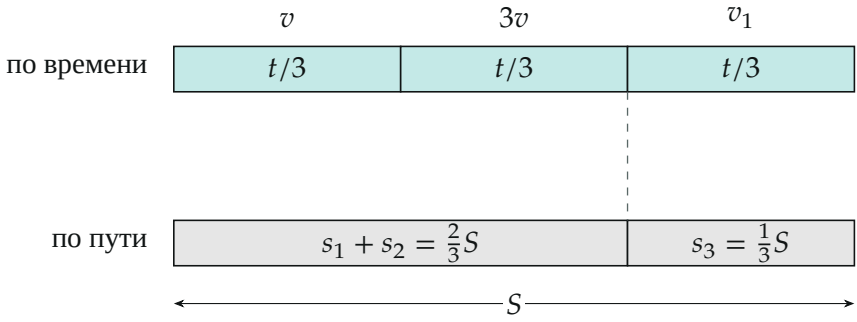
Треть времени по дороге

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 1] Человек первую треть полного времени движения прошел по лесной дороге со скоростью $v = 1$ км/ч. Вторую треть полного времени движения человек шел по шоссе со скоростью $3v$. Оставшейся участок, длина которого равна трети всего пути, человек прошел со скоростью v_1. Найти v_1.



Поясняющий рисунок. Сверху — время движения, разделённое на три равные части, со скоростями v, $3v$, v_1; снизу — пройденный путь S: последний участок равен трети пути, первые два вместе — двум третям. Длины на схеме условные

▲ **Решение. Что происходит.** Всё время движения t разбито на три равные части по $t/3$, и в каждой человек идёт с постоянной скоростью. Путь за часть времени — скорость, умноженная на $t/3$. Последний участок занимает последнюю треть времени, и по условию его длина — треть всего пути. Главная идея: две трети времени и две трети пути уже пройдены на первых двух участках, откуда находим S через t и v, а потом скорость на последнем участке. Класс задачи — путь при равных промежутках времени и постоянных скоростях.

Обозначения. t — полное время движения, S — весь путь; s_1, s_2, s_3 — пути на трёх участках, v_1 — скорость на последнем (искомая).

1. Путь на первых двух участках. Для постоянной скорости путь равен произведению скорости на время:

$$s_1 = v \cdot \frac{t}{3}, \qquad s_2 = 3v \cdot \frac{t}{3} = vt, \qquad s_1 + s_2 = \frac{4vt}{3}.$$

2. Полный путь. По условию длина последнего участка — треть всего пути, поэтому первые два участка составляют две трети:

$$s_1 + s_2 = \frac{2}{3}S \quad \Rightarrow \quad \frac{4vt}{3} = \frac{2}{3}S \quad \Rightarrow \quad S = 2vt.$$

Обратите внимание: время на последний участок — не искомая величина, а ровно последняя треть полного времени: две трети времени уже прошли на первых двух участках.

3. Скорость на последнем участке. Участок длины $S/3$ человек проходит за время $t/3$:

$$v_1 = \frac{S/3}{t/3} = \frac{S}{t} = \frac{2vt}{t} = 2v = 2 \text{ км/ч}.$$

Скорость на последнем участке равна средней скорости на всём пути: её участок составляет ровно ту же долю пути, что и времени.

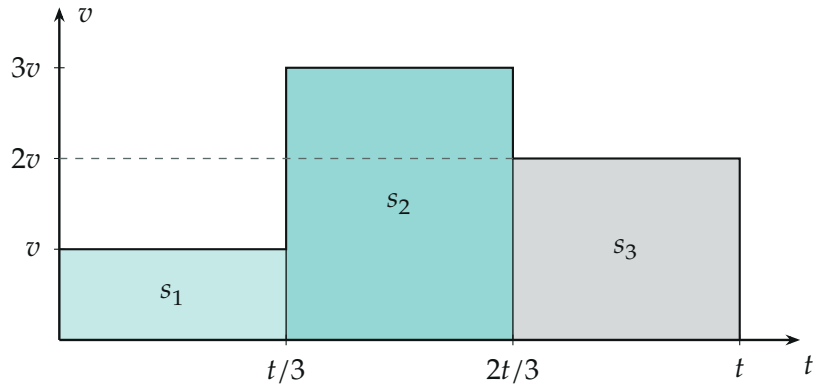


График $v(t)$. Площадь под графиком — путь: $s_1 : s_2 : s_3 = 1 : 3 : 2$ (в единицах $vt/3$); пунктир — средняя скорость $2v$, равная v_1. Для $t = 3$ ч пути были бы 1, 3 и 2 км

Согласованность. Проверим, что всё условие выполнено: $s_3 = v_1\dfrac{t}{3} = \dfrac{2vt}{3} = \dfrac{1}{3}S$ — совпадает с условием; $S = s_1 + s_2 + s_3 = (1 + 3 + 2)\dfrac{vt}{3} = 2vt$ — совпадает с п. 2.

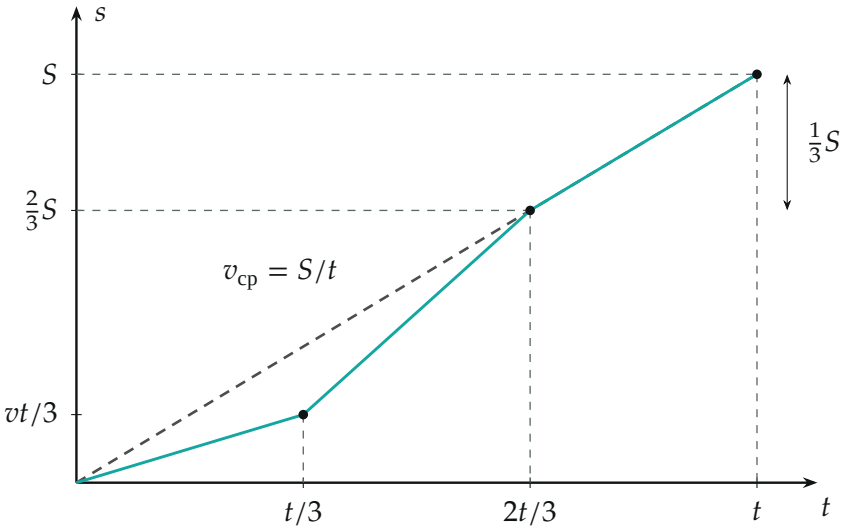


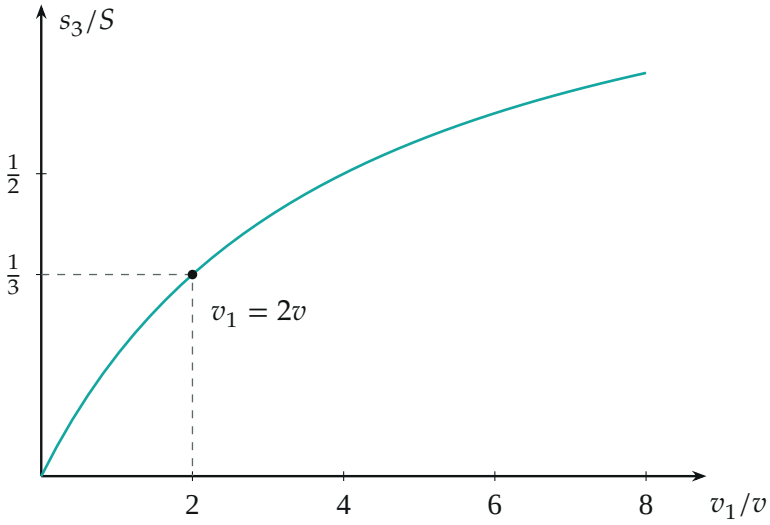
График пути $s(t)$ — ломаная с наклонами v, $3v$, $v_1 = 2v$. Точки $t/3$, $2t/3$ лежат на уровнях $vt/3$ и $\frac{2}{3}S$; последний отрезок лежит на хорде из начала координат — прямой средней скорости S/t

Второй способ — среднее за равные промежутки времени. Средняя скорость за всё время — среднее арифметическое скоростей трёх равных по времени участков (потому что интервалы времени равны):

$$\frac{S}{t} = \frac{v + 3v + v_1}{3}.$$

Но последний участок составляет треть пути за треть времени, поэтому $v_1 = \dfrac{S}{t}$. Подставим:

$$v_1 = \frac{4v + v_1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3v_1 = 4v + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v = 2 \text{ км/ч}.$$



Доля пути на последнем участке $s_3/S = \dfrac{v_1}{4v + v_1}$ *как функция отношения* v_1/v. *Условие «треть пути» выполняется при* $v_1/v = 2$

Проверка. Размерность: км/ч. Значение $v_1 = 2$ км/ч лежит между $v = 1$ и $3v = 3$ км/ч: человек на последнем участке шёл быстрее, чем по лесу, но медленнее, чем по шоссе. Если бы v_1 было больше $2v$, доля пути на последнем участке оказалась бы больше трети; если меньше — меньше трети (рисунок с графиком s_3/S).

Ответ. $v_1 = 2v = 2$ км/ч.