2024 блока

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 2] 2024 одинаковых блока массой m каждый подвешены с помощью невесомых нитей так, как показаны на рисунке. Найти силу натяжения нити, удерживающей 2024 блок. Масса груза равна массе блока.

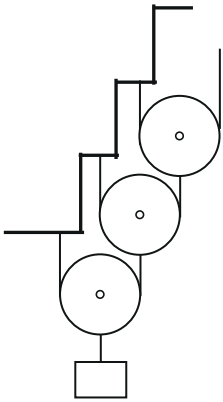


Рисунок условия. Показаны три нижних блока и груз; цепочка продолжается вверх до 2024-го блока. Нить каждого блока одним концом закреплена на уступе, другим — на оси следующего блока

▲ **Решение.** **Что происходит.** Нить, обходящая блок, тянет его вверх двумя концами с одинаковой силой: нить невесомая, блок вращается без трения, поэтому натяжение вдоль неё одно. К оси блока снизу привязана нить предыдущего блока, она тянет вниз. Значит, равновесие каждого блока связывает натяжения двух соседних нитей, а начальное значение даёт груз: его масса равна массе блока. Главная идея: найти натяжения первых нитей, увидеть закономерность и доказать её для любого номера. Класс задачи — равновесие цепочки блоков, рассуждение по индукции.

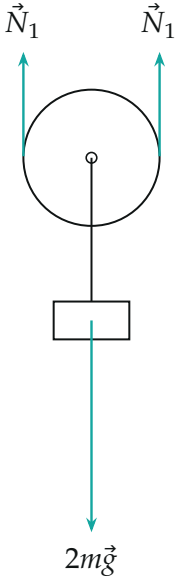
Обозначения. Блоки нумеруем снизу вверх: блок 1 — нижний, на нём висит груз. N_k — сила натяжения нити, обходящей блок k (по обеим сторонам блока она одинакова); T_0 — сила натяжения нити, на которой висит груз. Ось y направим вертикально вверх.

1. Груз. Груз неподвижен, поэтому нить, на которой он висит, уравновешивает его вес. Масса груза равна m:

$$T_0 = mg.$$

2. Блок 1. На блок 1 действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити груза $\vec{T}_0$ (вниз, на ось блока) и две силы натяжения нити, обходящей блок, $\vec{N}_1$ (вверх). Блок в равновесии, поэтому сумма проекций сил на ось y равна нулю:

$$2N_1 - mg - T_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{mg + mg}{2} = mg.$$

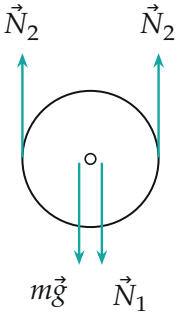


Силы на нижний блок вместе с грузом (нить груза — внутренняя): две силы натяжения $\vec{N}_1$ вверх и вес блока с грузом $2m\vec{g}$ вниз. Длины стрелок — по модулю: $N_1 = mg$, $2mg$ вдвое больше

3. Блок 2. Нить блока 1 одним концом привязана к оси блока 2, поэтому на блок 2 вниз действует сила $N_1 = mg$; кроме неё, вниз тянет его

вес $m\vec{g}$, а вверх — две силы $\vec{N}_2$:

$$2N_2 - mg - N_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{mg + mg}{2} = mg.$$



Силы на второй блок: вес $m\vec{g}$ и натяжение $\vec{N}_1$ нити нижнего блока (вниз), две силы натяжения $\vec{N}_2$ (вверх). Все стрелки одной длины: $N_2 = N_1 = mg$

4. Блок k и индукция. Для любого блока k в проекции на y:

$$2N_k = mg + N_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots,\ N_0 \equiv T_0).$$

Здесь N_{k-1} — сила, с которой нить блока $k-1$ тянет ось блока k вниз. Мы показали, что $N_0 = N_1 = N_2 = mg$. Если $N_{k-1} = mg$, то $2N_k = mg + mg$, откуда $N_k = mg$. Значит, натяжения всех нитей одинаковы и равны mg. В частности, для нити, на которой подвешен 2024-й блок, и для нити, которая его охватывает,

$$N_{2024} = mg.$$

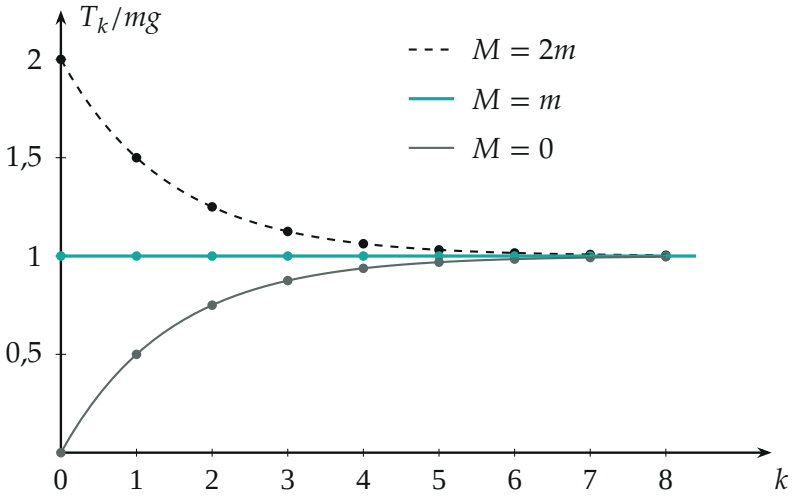
Обратите внимание: число 2024 в ответ не входит — цепочку можно сделать любой длины, и на каждый блок будет приходиться одно и то же натяжение mg.

Второй способ — общий вид решения. Пусть масса груза M, тогда $N_0 = Mg$. Вычтем mg из обеих частей соотношения $2N_k = mg + N_{k-1}$: $N_k - mg = \frac{1}{2}(N_{k-1} - mg)$. Разность $N_k - mg$ уменьшается вдвое на

каждом блоке:

$$N_k = mg + \frac{(M-m)\,g}{2^k}.$$

При $M = m$ разность равна нулю — получаем $N_k = mg$ при любом k. При $M \neq m$ натяжение быстро приближается к mg, а при $k = 2024$ отличается от него на ничтожную долю.



Натяжение N_k в долях mg для груза $M = 2m$, $M = m$, $M = 0$. При $M = m$ (условие задачи) все нити одинаково натянуты

Проверка. Размерность: mg — сила. Проверим равновесие всей системы: груз и 2024 блока весят $(2024 + 1)\,mg = 2025\,mg$. На уступах закреплены по одному концу нити каждого блока — 2024 нити по mg, ещё одну силу mg даёт второй конец нити верхнего блока (он тоже закреплён на потолке, иначе верхний блок не удержался бы): суммарная сила, с которой система тянет за опоры, равна $2025\,mg$ — совпадает с весом. Смысл: оба конца нити тянут блок вверх, поэтому при весе блока с нижней нитью $2mg$ каждый конец несёт mg.

Ответ. $N = mg$.