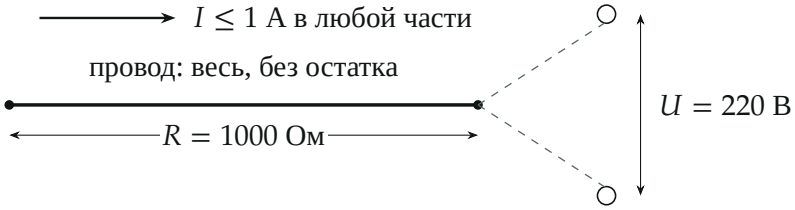
Нагреватель из куска провода

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Имеется кусок провода с сопротивлением $R = 1000$ Ом. Из провода изготавливают нагреватель, рассчитанный на работу в бытовой электрической сети с напряжением $U = 220$ В. Нагреватель какой максимальной мощности можно изготовить, если максимальный ток через провод — $I = 1$ А. Напряжение сети не зависит от нагрузки. При изготовлении нагревателя необходимо использовать весь провод без остатка.



Поясняющий рисунок. Провод $R = 1000$ Ом нужно целиком (его можно резать и соединять) превратить в нагреватель, питаемый от сети $U = 220$ В; ток по проводу не больше 1 А

▲ **Решение. Что происходит.** Напряжение на нагревателе задано сетью, поэтому мощность $P = U^2/r$ тем больше, чем меньше его сопротивление r. Но ток по проводу не больше 1 А, а значит, любой кусок провода, к которому приложено полное напряжение 220 В, должен иметь сопротивление не меньше 220 Ом. Чем больше таких кусков подключено к сети параллельно, тем больше мощность, и каждый из них должен работать на пределе — ровно 220 Ом и 1 А. Из 1000 Ом получается четыре куска по 220 Ом, остаётся 120 Ом, которые нельзя выбросить, но можно подключить так, чтобы они мощность не уменьшили. Главная идея: максимум числа ветвей на пределе тока и «обезвреженный» остаток. Класс задачи — максимум мощности при ограничении тока, параллельное соединение.

Обозначения. r — сопротивление одной ветви, n — число ветвей, подключённых параллельно к сети $U = 220$ В; $I_{\max} = 1$ А.

1. Предельное сопротивление ветви. К ветви приложено полное напряжение сети, и ток через неё не больше $I_{\max}$:

$$\frac{U}{r} \le I_{\max} \quad \Rightarrow \quad r \ge \frac{U}{I_{\max}} = 220 \text{ Ом}.$$

Мощность одной ветви $P_1 = U^2/r$ достигает наибольшего значения при $r = 220$ Ом: $P_1 = UI_{\max} = 220$ Вт.

2. Число ветвей. Из провода можно выкроить $n = \lfloor 1000/220 \rfloor = 4$ ветви по 220 Ом; они используют $4 \cdot 220 = 880$ Ом, остаётся 120 Ом. Пятую ветвь сделать нельзя: её сопротивление было бы меньше 220 Ом, а ток — больше 1 А.



План распила провода: четыре куска по 220 Ом (ветви) и остаток 120 Ом. Длины — пропорционально сопротивлению

3. Мощность. Четыре ветви работают параллельно, каждая — на пределе тока:

$$P = 4 \cdot \frac{U^2}{r} = 4 \cdot \frac{220^2}{220} \text{ Вт} = 880 \text{ Вт}.$$

Полный ток 4 А, и тот же результат даёт $P = U \cdot I_{\text{общ}} = 220 \cdot 4 = 880$ Вт.

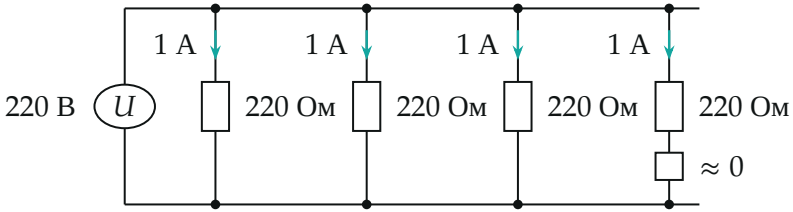
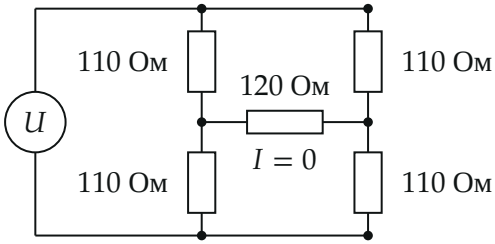


Схема нагревателя: четыре ветви по 220 Ом, ток 1 А в каждой; остаток 120 Ом (параллельный пучок коротких кусочков) включён в одну из ветвей: его сопротивление ≈ 0

4. Остаток провода. По условию его нужно использовать, не уменьшив мощность. Есть два способа. Первый — способ организаторов: разрезать остаток на k коротких кусочков по $120/k$ Ом и соединить их параллельно; сопротивление получившегося пучка равно $120/k^2$ Ом и при большом k стремится к нулю, а ток через каждый кусочек — в k раз меньше тока ветви. Включённый последовательно в любую ветвь пучок практически не меняет её сопротивление, и мощность стремится к 880 Вт.

Второй способ даёт ровно 880 Вт. Каждую ветвь по 220 Ом разделим пополам на два куска по 110 Ом и возьмём две такие ветви. Точки соединения половинок в обеих ветвях имеют одинаковый потенциал (110 В относительно полюса), поэтому остаток 120 Ом можно подключить между ними перемычкой: ток по ней не идёт, схема не меняется, а провод использован целиком.

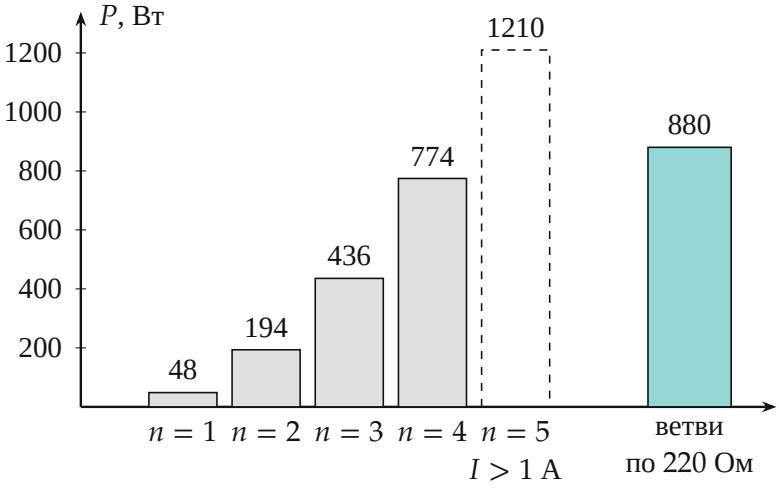


Две из четырёх ветвей, разрезанные пополам; остаток 120 Ом включён перемычкой между серединами: потенциалы середин равны, ток $I = 0$

Обратите внимание: остаток нельзя просто присоединить к сети ещё одной ветвью: сопротивление 120 Ом меньше 220 Ом, ток был бы $220/120 \approx 1{,}8$ А, больше допустимого.

Почему больше нельзя. Полный ток $I_{\text{общ}}$ течёт через любую «поверхность» постоянного потенциала внутри нагревателя (от 0 до 220 В). Каждый кусок провода несёт не больше 1 А, поэтому такую поверхность пересекают не меньше $\lceil I_{\text{общ}} \rceil$ кусков. На куске с током I_k падение напряжения $U_k = I_k R_k \le R_k$. Каждый тонкий слой потенциала между 0 и 220 В пересекают не менее $\lceil I_{\text{общ}} \rceil$ кусков, поэтому сумма падений напряжения $\sum U_k \ge 220\lceil I_{\text{общ}} \rceil$. Тогда $1000 = \sum R_k \ge \sum U_k \ge 220\lceil I_{\text{общ}} \rceil$,

откуда $\lceil I_{\text{общ}} \rceil \le 4$, $I_{\text{общ}} \le 4$ А и $P = UI_{\text{общ}} \le 880$ Вт: больше получить нельзя.



Мощность при разных способах. Равные ветви из всего провода ($r = 1000/n$) допустимы при $n \le 4$, но дают меньше: при $n = 4$ ветви по 250 Ом дают 774 Вт. Пять ветвей по 200 Ом — ток 1,1 А. Ветви по 220 Ом и «обезвреженный» остаток — 880 Вт

Проверка. Размерность: $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт}$. При четырёх ветвях по 220 Ом ток каждой равен $220/220 = 1$ А — допустимый. Сравнение: если нарезать весь провод поровну на четыре ветви по 250 Ом, ток каждой 0,88 А, мощность $4 \cdot 220^2/250 = 774{,}4$ Вт — меньше 880 Вт: выгоднее подходить к пределу тока и отдельно «прятать» остаток. В тексте решения организаторов написано «4 части, три с сопротивлением 220 Ом» — это опечатка: имеется в виду пять частей, четыре по 220 Ом и остаток 120 Ом.

Ответ. $P_{\max} = 880$ Вт.