Стержень в стакане

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 5] На столе стоит в цилиндрический стакан массой M. В стакан ставят стержень так, как показано на рисунке, причем в стакане оказывается пятая часть длины стержня. При какой массе стержня стакан будет находиться в равновесии?

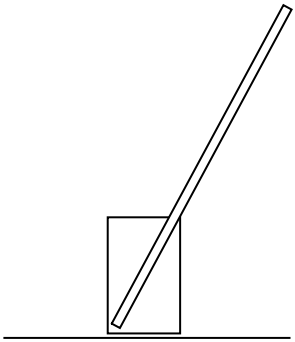
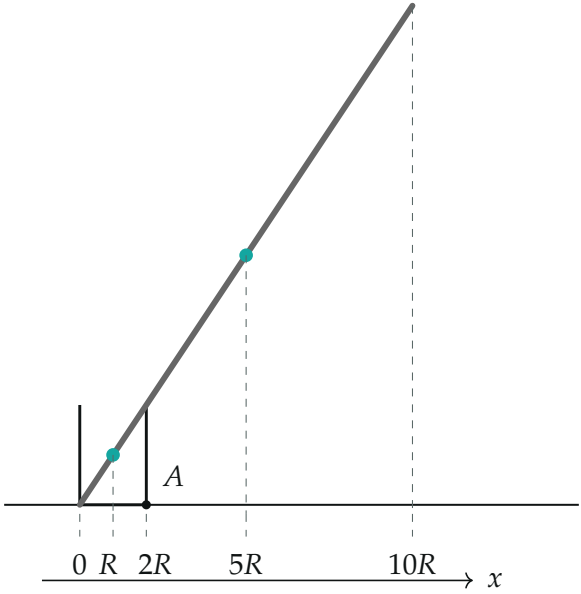


Рисунок условия (схематичный: на нём внутри стакана оказывается больше пятой части стержня; точные пропорции — на следующих рисунках)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Стакан со стержнем можно считать одним твёрдым телом: силы, с которыми стержень и стакан давят друг на друга, внутренние и в равновесии всей системы не участвуют. Снаружи на систему действуют только сила тяжести и реакция стола, а реакция стола может быть приложена только к площадке, на которой дно касается стола. Поэтому система стоит, пока вертикаль, проведённая через её центр масс, проходит над дном. Наклонный стержень сдвигает центр масс вправо, и чем тяжелее стержень, тем ближе центр масс к правому краю дна. Идея: найти, при какой массе вертикаль через центр масс пройдёт ровно через правое ребро дна.

Обозначения. R — радиус стакана (дно — круг диаметром $2R$, стенки считаем тонкими), l — длина стержня, α — угол между стержнем и горизонталью, h — высота стакана, m — масса стержня, A — правое нижнее ребро стакана, вокруг которого он начал бы опрокидываться. Ось x направим горизонтально вправо в плоскости рисунка, начало отсчёта — у левой стенки стакана, внутри него; там стоит нижний конец стержня.

Стержень лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось стакана, поэтому дно по оси x занимает отрезок от 0 до $2R$.



Масштабный рисунок: стержень упирается нижним концом в угол у левой стенки и касается верхнего правого ребра стакана. Точки — центры масс стакана ($x = R$) и стержня (его середина, $x = 5R$); внизу — их проекции на горизонтальную ось

1. Условие равновесия. На систему «стакан + стержень» действуют сила тяжести $(M+m)\vec{g}$, приложенная в центре масс, и реакция стола $\vec{N}$ на дно. Горизонтальных внешних сил нет (стержень до стола не достаёт), поэтому трение не нужно. Равнодействующая реакции стола равна по модулю $(M+m)g$ и направлена вверх. Для вращательного равновесия она должна лежать на одной вертикали с силой тяжести, то есть проходить через центр масс. Реакция приложена только на дне, значит, равновесие возможно, пока для горизонтальной координаты центра масс x_c

$$0 \le x_c \le 2R.$$

Левое неравенство выполняется всегда (оба тела правее левой стенки), остаётся $x_c \le 2R$: центр масс не вышел за правое ребро A.

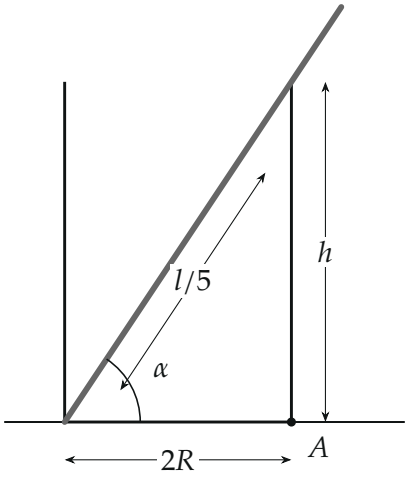
2. Геометрия: где середина стержня. Нижний конец стержня стоит в левом углу дна, а сам стержень проходит через верхнее правое ребро стакана. Часть стержня внутри стакана — это гипотенуза прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит дно ($2R$), а вторым — правая стенка (рисунок ниже). По условию эта гипотенуза равна пятой части стержня, $l/5$. Угол при нижнем конце равен α, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{2R}{l/5} = \frac{10R}{l}.$$

Середина стержня лежит от нижнего конца на расстоянии $l/2$ по стержню, а по горизонтали — на

$$x_2 = \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}\cdot\frac{10R}{l} = 5R.$$

Длина стержня и высота стакана сократились: нужна только горизонтальная координата.



Прямоугольный треугольник «дно — правая стенка — стержень»: гипотенуза $l/5$ — часть стержня внутри стакана

3. Центр масс системы. Однородный стакан имеет центр масс на своей оси, $x_1 = R$; однородный стержень — в середине, $x_2 = 5R$. Центр

масс двух тел лежит на оси x как взвешенное среднее:

$$x_c = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m} = \frac{MR + 5mR}{M+m} = R\,\frac{M+5m}{M+m}.$$

4. Условие устойчивости. Требуем $x_c \le 2R$:

$$R\,\frac{M+5m}{M+m} \le 2R \quad \Rightarrow \quad M+5m \le 2M+2m \quad \Rightarrow \quad 3m \le M.$$

Стакан стоит, если $m < M/3$, и опрокидывается, если $m > M/3$. При $m = M/3$ вертикаль через центр масс идёт ровно по ребру A — предельное положение.

Второй способ: моменты вокруг ребра A. Стакан опрокидывается вокруг ребра A (ось вращения перпендикулярна рисунку). Сила тяжести стакана приложена на расстоянии $2R - R = R$ левее ребра и удерживает систему, сила тяжести стержня — на расстоянии $5R - 2R = 3R$ правее ребра и опрокидывает её. Реакция стола в предельном случае приложена в самом ребре A и момента не создаёт. Равновесие сохраняется, пока момент удерживающей силы не меньше опрокидывающего:

$$MgR \ge mg \cdot 3R \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{M}{3}.$$

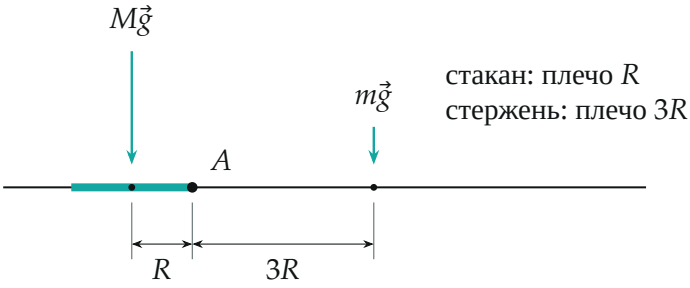
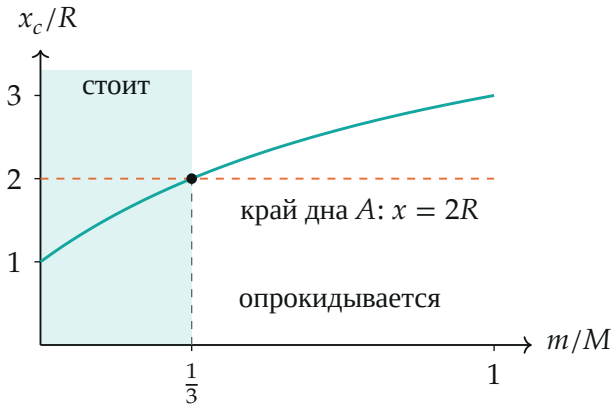


Схема рычага относительно ребра A в предельном случае $M = 3m$: слева сила тяжести стакана с плечом R, справа сила тяжести стержня с плечом $3R$; длины стрелок относятся как $3:1$. Бирюзовый отрезок — дно стакана, A — его правый край

Обратите внимание: силы, действующие на стержень со стороны стакана (в точке опоры внизу и на ребре вверху), нам неизвестны, и искать их не нужно. Для системы «стакан + стержень» они внутренние и в уравнения не входят. Именно поэтому задача решается без разбора равновесия самого стержня.

Как меняется положение центра масс. При $m = \mu M$ имеем $x_c = R\,(1 + 5\mu)/(1 + \mu)$: при $\mu = 0$ центр масс в центре дна, с ростом μ он уходит к середине стержня, $x_c \to 5R$, и пересекает уровень $2R$ при $\mu = 1/3$.



Координата центра масс системы в зависимости от отношения масс. Горизонталь — правый край дна; бирюзовая полоса — область, где стакан стоит

Проверка. Величина m/M безразмерна. Предельные случаи: $m \to 0$ — стакан без стержня, $x_c = R$, он стоит; $m \to \infty$ — центр масс уходит в середину стержня, $x_c \to 5R > 2R$, стакан опрокидывается. При $m = M/3$: $x_c = R\,(1 + 5/3)/(1 + 1/3) = 2R$, это ровно ребро A. Оба способа дали одно и то же условие.

Смысл. Стакан со стержнем опрокидывается тогда, когда стержень настолько тяжелее стакана, что центр масс всей системы выходит за край дна; граница — стержень втрое легче стакана.

Ответ. Стакан находится в равновесии при $m < \dfrac{M}{3}$ (при $m = M/3$ — на грани опрокидывания).