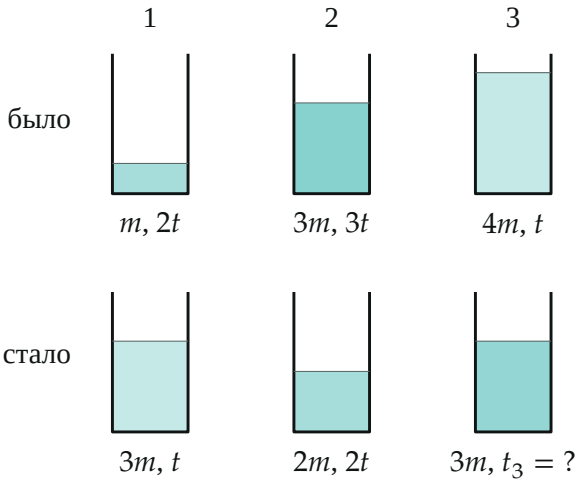
Три стакана с водой

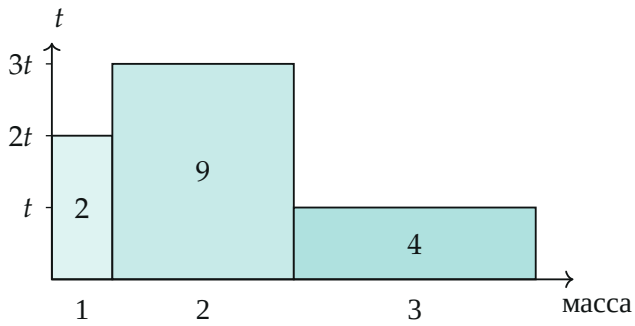
Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 1] Имеются три стакана, содержащих массы m, $3m$ и $4m$ воды при температурах $2t$, $3t$ и t соответственно (температуры заданы в градусах Цельсия). После переливаний воды из стакана в стакан оказалось, что в первом стакане $3m$ воды с температурой t, во втором — $2m$ с температурой $2t$. Найти температуру воды в третьем стакане. Теплоёмкостью стаканов и теплопотерями пренебречь.



Поясняющий рисунок к условию: слева направо стаканы 1, 2, 3; сверху состояние до переливаний, снизу после; высота воды пропорциональна массе, густота бирюзы — температуре

▲ **Решение.** **Что происходит.** Переливание — это смешивание порций воды: тёплая порция отдаёт теплоту, холодная получает, а вся система «три стакана» теплоизолирована. Класс задачи — тепловой баланс: масса воды в системе сохраняется, а вместе с ней сохраняется сумма $c\,m\,t$ по всем порциям (где c — удельная теплоёмкость воды). Главная идея: записать два закона сохранения для состояния «до» и «после» и не интересоваться, в каком порядке переливали.

Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды; m_3 и t_3 — масса и температура воды в третьем стакане после переливаний (искомая — t_3); индексы 1, 2, 3 — номера стаканов.



Состояние до переливаний: ширина столбика — масса воды в стакане, высота — температура, площадь — величина mt (числа в столбиках, в единицах mt): 2, 9, 4, *всего* 15

1. Сохранение массы воды. Вода из системы не уходит и в неё не добавляется, значит, суммарная масса до и после одинакова:

$$m + 3m + 4m = 3m + 2m + m_3 \quad \Rightarrow \quad m_3 = 3m.$$

В третьем стакане оказалось $3m$ воды: восемь «масс» разошлись как $3 + 2 + 3$.

2. Тепловой баланс при одном смешивании. Если смешать порции m_a при t_a и m_b при t_b, в смеси установится температура θ, и теплота, отданная более тёплой порцией, равна теплоте, полученной холодной (потерь нет):

$$c\,m_a(t_a - \theta) = c\,m_b(\theta - t_b) \quad \Rightarrow \quad c\,m_a t_a + c\,m_b t_b = c\,(m_a + m_b)\,\theta.$$

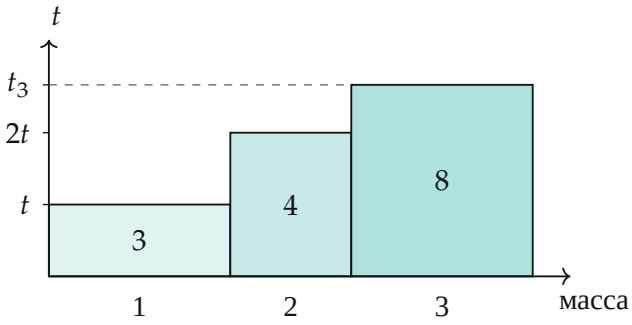
Слева сумма $c\,m\,t$ до смешивания, справа — после, то есть при любом переливании сумма $\sum c\,m\,t$ по всем стаканам не меняется. Значит, она одна и та же в начале и в конце процесса, как бы он ни шёл.

Обратите внимание: «ноль» шкалы Цельсия здесь не важен. Если сдвинуть начало отсчёта температур на t_0, в обе части уравнения доба-

вится одно и то же $c\,t_0\cdot 8m$ (суммарная масса воды до и после одинакова, шаг 1), и равенство сохранится.

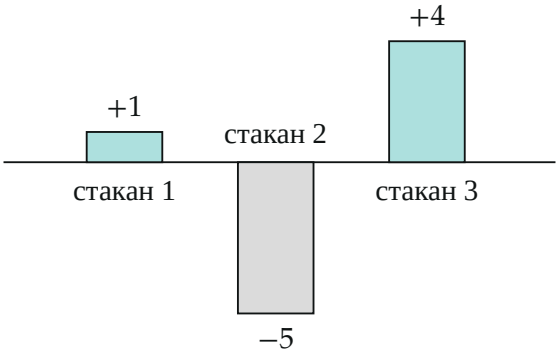
3. Уравнение баланса. До переливаний: $c\,m\cdot 2t + c\cdot 3m\cdot 3t + c\cdot 4m\cdot t$; после: $c\cdot 3m\cdot t + c\cdot 2m\cdot 2t + c\cdot 3m\cdot t_3$. Приравняем и сократим на $c\,m\,t$ (масса в единицах m, температура в единицах t):

$$2+9+4 = 3+4+3\,\frac{t_3}{t} \quad\Rightarrow\quad 15 = 7+3\,\frac{t_3}{t} \quad\Rightarrow\quad t_3 = \frac{8}{3}\,t.$$



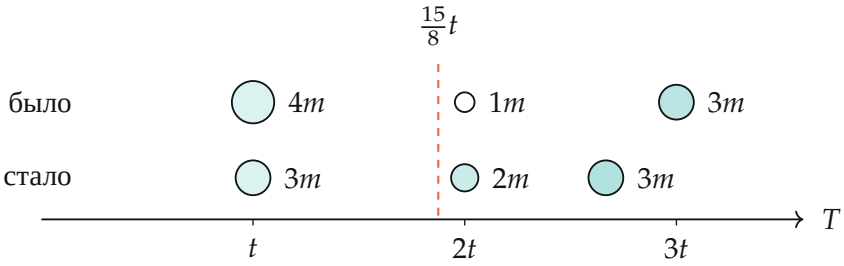
Состояние после переливаний: площадь столбиков (в единицах mt) 3, 4 и 8, всего снова 15; высота третьего столбика, а значит и t_3, находится из равенства площадей

4. Куда ушла и откуда пришла «теплота». Сравним, как изменилась величина $c\,m\,t$ в каждом стакане (в единицах $c\,m\,t$): в первом $3-2=+1$, во втором $4-9=-5$, в третьем $8-4=+4$. В сумме нуль: второй стакан остыл ($3t\to 2t$) и отдал всё, что получили первый и третий; в третьем стакане вода стала теплее ($\frac{8}{3}t > t$).



Изменение величины с $m\,t$ в стаканах в единицах с $m\,t$: сумма $+1-5+4=0$

Проверка. Размерность: t_3 выражено через t, температура. Температура должна лежать между наименьшей и наибольшей из начальных температур: $t < \frac{8}{3}t < 3t$ — верно. Второй способ: найдём среднюю температуру всей воды двумя способами. До переливаний $\theta = \dfrac{15\,mt}{8m} = \dfrac{15}{8}\,t$. После переливаний то же $\theta = \dfrac{3\cdot t + 2\cdot 2t + 3\cdot t_3}{8}$; подставив $t_3 = \frac{8}{3}t$, получим $\dfrac{3+4+8}{8}t = \dfrac{15}{8}t$ — сходится.



Температуры порций воды (размер кружка пропорционален массе): до и после переливаний «центр» температур, взвешенный по массам, один и тот же, $\frac{15}{8}t$ (штриховая линия)

Смысл. Когда воду переливают без потерь, порядок переливаний не важен: сохраняются масса и сумма $c\,m\,t$, и двух этих законов хватает, чтобы найти единственную неизвестную температуру.

Ответ. $t_3 = \dfrac{8}{3}\,t$ (в третьем стакане $3m$ воды при температуре $\frac{8}{3}t$).