Вольтметр в цепи меняют местами

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 2] В электрической цепи, схема которой дана на рисунке, показания вольтметра равны нулю. Когда резистор R_1 и вольтметр поменяли местами, токи, текущие через оба резистора верхнего колена цепи, не изменились, а показания вольтметра стали равны $U_0 = 10$ В. Найти напряжение источника и сопротивления R_1 и R_2. Сопротивление вольтметра $r_V = 1$ кОм. Источник идеален.

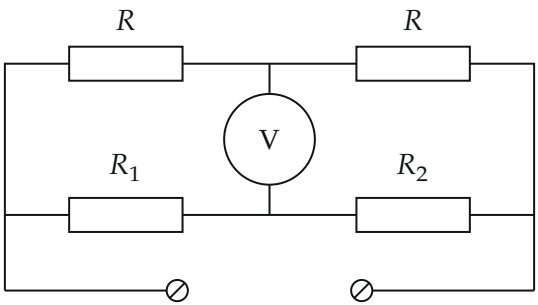


Рисунок условия: источник подключён к нижним клеммам, вверху два резистора R, внизу R_1 и R_2, вольтметр соединяет их середины

▲ **Решение. Что происходит.** Это мост: две ветви между шинами источника (верхняя R–R и нижняя R_1–R_2) и вольтметр между их серединами. Вольтметр всегда показывает напряжение на самом себе, поэтому его показание равно разности потенциалов между узлами T и M. В первом включении она равна нулю, во втором равна U_0. Главная идея: ток по мосту определяется разностью потенциалов его концов. Нулевое показание значит, что потенциалы T и M равны, а одинаковые токи в двух верхних резисторах значат, что из узла T вниз ничего не уходит, то есть мост тока не несёт.

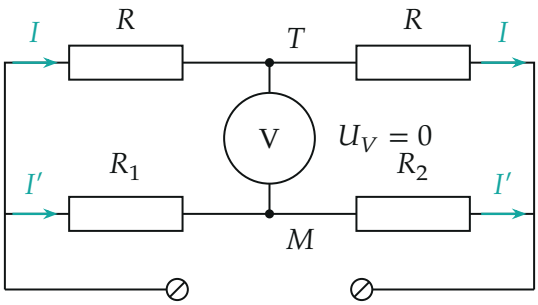
Обозначения. U — напряжение источника (между левой и правой шинами, полярность не важна), T и M — узлы верхней и нижней ветвей, к которым подключался вольтметр, I — ток в верхних резисторах, I' — ток в нижней ветви, r_V — сопротивление вольтметра. Два верхних резистора на рисунке одинаковы и обозначены R.

1. Первое включение. Показание $U_V = 0$, а $U_V = I_V r_V$ с конечным r_V, значит ток через вольтметр $I_V = 0$ (в узле T ток уходит только в правый R, в узле M — только в R_2). Поэтому ток в обоих верхних резисторах один и тот же, I, и напряжения на равных резисторах равны:

$$U_R = IR, \qquad IR + IR = U \quad \Rightarrow \quad IR = \frac{U}{2}.$$

Потенциал узла T лежит ровно посередине между потенциалами шин. Вольтметр показывает нуль, значит потенциал M тот же, и на R_1 и R_2 тоже падает по $U/2$. Из-за нулевого тока вольтметра в нижней ветви течёт один и тот же ток I':

$$I'R_1 = \frac{U}{2} = I'R_2 \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_2.$$



Первое включение: через вольтметр ток не идёт, в каждой ветви течёт свой ток (I вверху, I' внизу), узлы T и M эквипотенциальны

2. Второе включение: ток моста. После перестановки резистор R_1 стоит между узлами T и M, а вольтметр — в левом плече нижней ветви. Токи в обоих верхних резисторах по условию остались прежними, то есть равными I. Запишем закон сохранения заряда для узла T: ток из левого R равен сумме токов, уходящих в правый R и вниз через R_1:

$$I = I + I_{R_1} \quad \Rightarrow \quad I_{R_1} = 0.$$

Через R_1 ток не течёт, и разности потенциалов на нём нет: $\varphi_M = \varphi_T$.

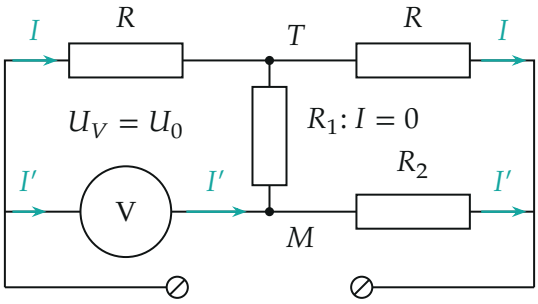
3. Напряжение источника. Токи в верхних резисторах те же, значит на них прежние напряжения $IR = U/2$, и потенциал узла T, а с ним и M, лежит посередине между шинами. Вольтметр теперь включён между левой шиной и узлом M, поэтому он показывает как раз половину напряжения источника:

$$U_0 = U_V = \frac{U}{2} \quad \Rightarrow \quad U = 2U_0 = 20\ \text{В}.$$

4. Сопротивления. Узел M соединён с шинами только через вольтметр и R_2 (ток R_1 равен нулю), поэтому через них течёт один ток I'. На вольтметре напряжение $U/2$ и на R_2 напряжение тоже $U/2$ (потенциал M равен $U/2$, потенциал правой шины равен нулю):

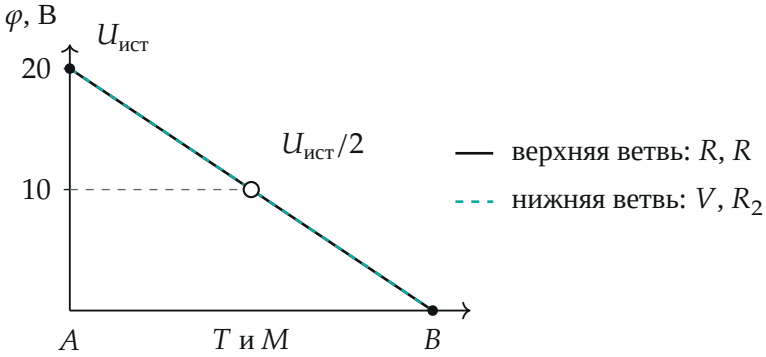
$$I' = \frac{U/2}{r_V} = \frac{U/2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_2 = r_V = 1\ \text{кОм}, \qquad R_1 = R_2 = 1\ \text{кОм}.$$

Обратите внимание: вольтметр здесь не идеален, его сопротивление конечное, и ток через него идёт: он стоит в цепи последовательно с R_2. Нельзя считать, что в этом включении вольтметр «ничего не меняет».



источник $U_{\text{ист}}$

Второе включение: вольтметр и R_1 поменяны местами; через R_1 ток не идёт, токи I в верхних резисторах те же, что на предыдущем рисунке, вольтметр и R_2 соединены последовательно



Потенциал вдоль верхней и нижней ветвей (в обоих включениях): от $U_{ист}$ у левой шины через $U_{ист}/2$ в узлах T и M к нулю у правой шины; поэтому T и M можно соединить любым резистором, ток по нему не пойдёт

Проверка. Размерность: напряжение — в вольтах, сопротивления — в килоомах, как r_V. Пусть, например, $R = 3$ кОм (значение R в условии не дано, ответ от него не зависит). Первое включение: $I = 20/(2 \cdot 3) \approx 3{,}33$ мА, $I' = 20/(1+1) = 10$ мА, потенциалы узлов 10 В, ток вольтметра нулевой. Второе включение: токи в верхних резисторах те же 3,33 мА, ток через R_1 нулевой, через вольтметр 10 мА и на нём $10 \cdot 1 = 10$ В $= U_0$. Те же числа получились при решении полной системы уравнений для узлов (расчёт на python) при $R = 0{,}5$ кОм и $R = 3$ кОм.

Смысл. Равенство токов в двух соседних одинаковых резисторах и нулевое показание вольтметра — по сути две формы одного условия: потенциалы узлов равны.

Ответ. $U_{ист} = 20$ В; $R_1 = R_2 = r_V = 1$ кОм.