Тела, нить и пружина

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 3] На горизонтальном столе лежат два тела с массой $2m$ и m, связанные невесомой нерастяжимой нитью и прикреплённые за тело с массой $2m$ к вертикальной стенке с помощью пружины. На тело массой m действует внешняя сила $\vec{F}$, а тела покоятся. В некоторый момент времени внешняя сила мгновенно уменьшается в 2 раза по величине, не изменяя направление. Найти ускорения тел сразу после этого. Трения нет.

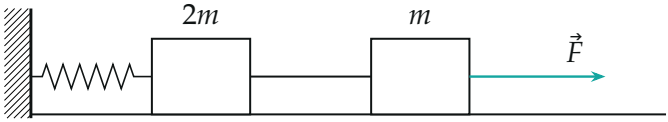


Рисунок условия: стенка, пружина, тело $2m$, нить, тело m и внешняя сила $\vec{F}$, направленная от стенки

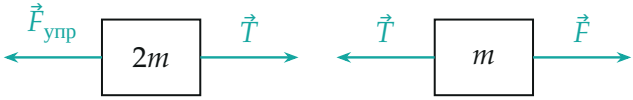
▲ **Решение. Что происходит.** Пока сила $\vec{F}$ постоянна, пружина растянута и тянет тело $2m$ к стенке. В первый миг после уменьшения силы тела ещё не успели сдвинуться, поэтому деформация пружины, а с ней и сила упругости, остаются прежними. Нить же — жёсткая связь: её натяжение мгновенно подстраивается так, чтобы расстояние между телами не менялось. Класс задачи: мгновенное изменение силы, где сила упругости не меняется скачком, а сила натяжения нерастяжимой нити меняется. Главная идея: записать второй закон Ньютона для каждого тела сразу после изменения и воспользоваться тем, что у связанных нерастяжимой нитью тел ускорения одинаковы.

Обозначения. Ось x направим от стенки к телам (по направлению силы $\vec{F}$); $F_{\text{упр}}$ — модуль силы упругости пружины, T и T_1 — натяжение нити до и сразу после уменьшения силы, a_x — проекция ускорения тел на ось x сразу после. Вертикальные силы (тяжести и реакции стола) уравновешены и на рисунках не показаны.

1. До изменения силы: тела покоятся. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на ось x при нулевом ускорении. Для тела m действуют сила F вправо и натяжение нити T влево, для тела $2m$

— натяжение нити вправо и сила упругости пружины влево (пружина растянута):

$$F - T = 0, \qquad T - F_{\text{упр}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F, \quad F_{\text{упр}} = F.$$



Силы на тела до уменьшения силы: тела покоятся, все четыре стрелки равны по длине

2. Сразу после уменьшения силы. Внешняя сила стала равна $F/2$. Тела не успели сместиться, пружина не изменила длину, значит

$$F_{\text{упр}} = F.$$

Натяжение нити стало T_1 — неизвестное. Нить невесома и нерастяжима, поэтому по модулю она тянет оба тела одинаково (T_1), а ускорение у тел одно и то же, a_x: расстояние между телами не меняется. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на ось x:

$$\begin{aligned} &\text{тело } 2m: \quad 2m\,a_x = T_1 - F_{\text{упр}} = T_1 - F, \\ &\text{тело } m: \quad m\,a_x = \frac{F}{2} - T_1. \end{aligned}$$

Неизвестных осталось два (a_x и T_1), уравнений тоже два.

3. Решаем систему. Сложим уравнения: нить входит с разными знаками и сокращается,

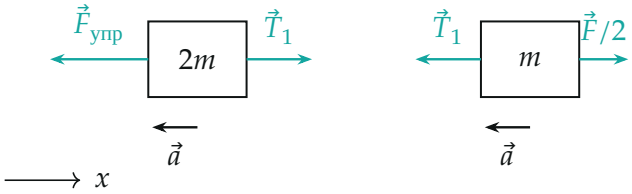
$$3m\,a_x = \frac{F}{2} - F = -\frac{F}{2} \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{F}{6m}.$$

Отсюда натяжение нити из уравнения для тела m:

$$T_1 = \frac{F}{2} - m\,a_x = \frac{F}{2} + \frac{F}{6} = \frac{2F}{3}.$$

Проекция ускорения отрицательна: оба тела разгоняются к стенке (против оси x) с одинаковым по модулю ускорением

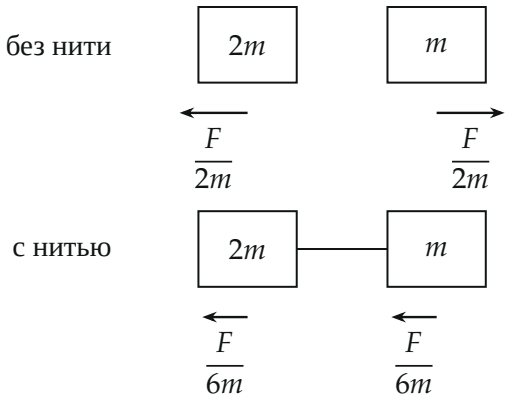
$$a = \frac{F}{6m}.$$



Силы на тела сразу после уменьшения силы и их ускорения. Для тела $2m$: влево F, вправо $2F/3$, сумма $F/3$ влево; для тела m: влево $2F/3$, вправо $F/2$, сумма $F/6$ влево; $a = F/(6m)$ у обоих

Обратите внимание: по условию сила упругости не изменилась, а натяжение нити изменилось скачком, $T_1 = \frac{2}{3}F \neq F$. Если ошибочно оставить $T = F$, тело m получило бы ускорение $a = (F/2 - F)/m = -F/(2m)$, а тело $2m$ осталось бы в покое: ускорения разные, и нерастяжимая нить была бы нарушена.

4. Нить действительно натянута. Мы предполагали, что нить натянута ($T_1 > 0$). Результат $T_1 = 2F/3 > 0$ это подтверждает. Можно проверить и так: без нити тело $2m$ ускорялось бы под действием силы упругости к стенке с ускорением $F/(2m)$, а тело m под действием $F/2$ — от стенки с тем же по модулю ускорением. Они разъезжались бы, значит нить сразу натягивается и «стягивает» тела.



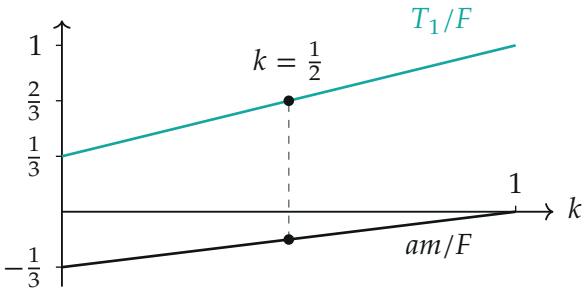
Верхний ряд: ускорения тел, если бы нити не было (тела разъезжаются); нижний ряд — с нитью: у обоих $F/(6m)$ к стенке

Второй способ: вся система. Для системы из двух тел и нити внутренние силы (натяжение нити) сокращаются. Остаются внешние силы вдоль оси x: сила упругости F влево и сила $F/2$ вправо. Масса системы $3m$:

$$3m\,a_x = \frac{F}{2} - F \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{F}{6m}.$$

Тот же результат.

Как всё зависит от уменьшения силы. Пусть внешняя сила стала kF. Тогда по тем же уравнениям $a_x = -\dfrac{(1-k)F}{3m}$, $T_1 = \dfrac{(1+2k)F}{3}$. При $k = 1$ (силу не менять) $a = 0$ и $T_1 = F$, как в покое; при $k = 0$ сила исчезла, $a = F/(3m)$ к стенке, $T_1 = F/3$. Заданное в условии $k = \frac{1}{2}$ даёт найденные значения.



Безразмерные величины am/F (проекция ускорения) и T_1/F в зависимости от доли k, до которой уменьшили силу; точки — $k = \frac{1}{2}$: $am/F = -\frac{1}{6}$, $T_1/F = \frac{2}{3}$

Проверка. Размерность: F/m — ускорение. Предельные случаи по графику выше согласуются со здравым смыслом: при $k = 1$ ничего не происходит, при $k = 0$ вся система массой $3m$ ускоряется одной силой упругости F. Знак: сила упругости F больше внешней $F/2$, поэтому тела ускоряются к стенке.

Смысл. Сразу после изменения силы оба тела движутся к стенке с общим ускорением $F/(6m)$, а натяжение нити скачком падает с F до $2F/3$: внешняя сила на теле m стала вдвое меньше, а пружина по-прежнему тянет тело $2m$ с прежней силой.

Ответ. Ускорения обоих тел одинаковы по модулю: $a = \dfrac{F}{6m}$, направлены к стенке (против силы $\vec{F}$); натяжение нити сразу после уменьшения силы $T_1 = \dfrac{2F}{3}$.