Блоки и тела в воде

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Система из двух невесомых блоков и двух массивных тел находится в равновесии. Размеры тел одинаковы, но они сделаны из разных материалов. Известно, что левое тело погружено в воду на $1/4$ своего объёма, правое — на $3/4$ своего объёма. Найти плотность правого тела, если плотность левого $\rho_1 = 0{,}7$ г/см^3. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

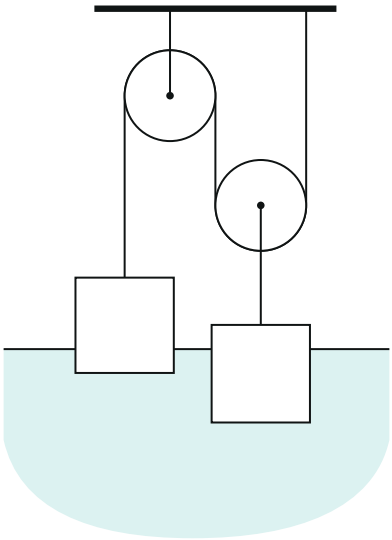
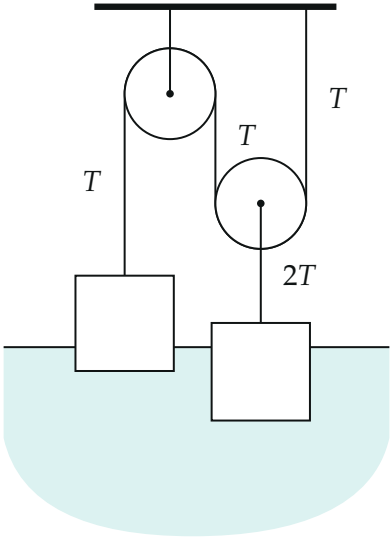


Рисунок условия: левый блок закреплён на потолке, правый подвижный; нить идёт от левого тела через левый блок, огибает правый блок снизу и закреплена на потолке; правое тело подвешено на оси подвижного блока

▲ **Решение. Что происходит.** Это равновесие двух тел в воде, связанных нитью через блоки. Блоки невесомы и без трения, поэтому по всей нити натяжение одно и то же, T. Левое тело висит на одном конце нити, а правое подвешено к оси подвижного блока, который тянут вверх две ветви нити, и потому действует на тело вдвое большей силой, $2T$. Кроме того, на оба тела действуют сила тяжести и сила Архимеда, зависящая от погружённого объёма. Главная идея: записать условия равновесия двух тел и исключить T.

Обозначения. V — объём каждого тела (по условию одинаковый), ρ_2 — искомая плотность правого тела, T — натяжение нити, F_{A1}, F_{A2} — силы Архимеда на левое и правое тело, $m_1 = \rho_1 V$, $m_2 = \rho_2 V$ — их массы. Ось направим вертикально вверх.

1. Почему на правое тело действует $2T$. Подвижный блок невесом: его масса равна нулю, поэтому по второму закону Ньютона равнодействующая сил на него равна нулю при любом ускорении. Вверх его тянут две ветви нити с силой T каждая, вниз — ось, на которой висит правое тело. Отсюда ось тянет вниз с силой $2T$, и по третьему закону Ньютона блок тянет вверх правое тело с силой $2T$.



Натяжение вдоль нити одинаково (T во всех трёх участках), а на ось подвижного блока и на правое тело действует сила $2T$

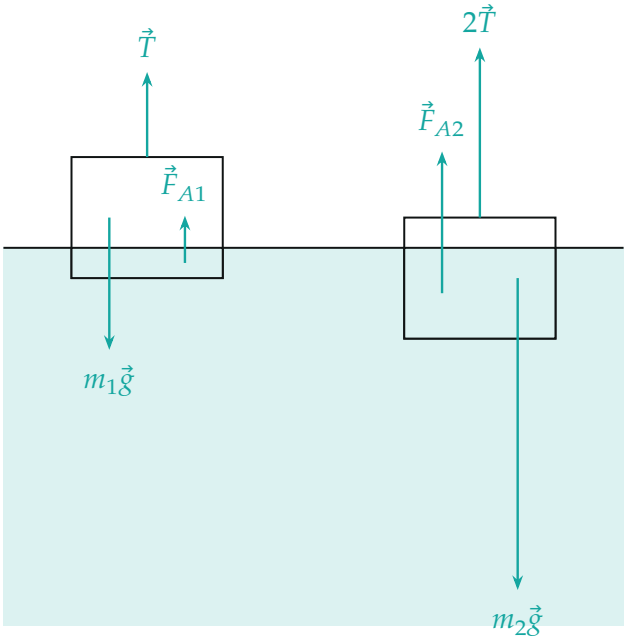
2. Силы на тела. На левое тело действуют: нить вверх с силой T, сила тяжести $m_1 g$ вниз, сила Архимеда вверх. Погружена четверть объёма, и сила Архимеда по закону Архимеда равна весу вытесненной воды:

$$F_{A1} = \rho_0 g \frac{V}{4}.$$

На правое тело: сила $2T$ вверх, сила тяжести $m_2 g$ вниз, сила Архимеда

вверх; погружено три четверти объёма:

$$F_{A2} = \rho_0 g \frac{3V}{4}.$$



Силы на тела в равновесии (в одном масштабе, 2 см на единицу $\rho_0 g V$): слева T, F_{A1} вверх и $m_1 g$ вниз, справа $2T$, F_{A2} вверх и $m_2 g$ вниз

3. Условия равновесия. Тела покоятся, поэтому сумма сил на каждое равна нулю. В проекции на ось вверх:

$$T + \rho_0 g \frac{V}{4} - \rho_1 g V = 0, \qquad 2T + \rho_0 g \frac{3V}{4} - \rho_2 g V = 0.$$

Неизвестных три (T, ρ_2 и V, но V сокращается), уравнений два плюс известные плотности: этого достаточно.

4. Исключаем T. Умножим первое уравнение на 2 и вычтем из вто-

рого:

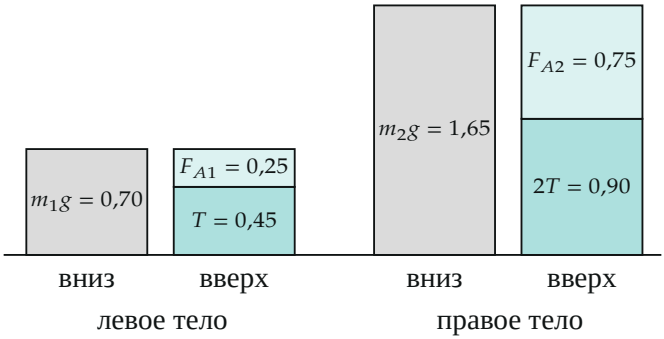
$$\rho_0 g\,\frac{3V}{4} - 2\rho_0 g\,\frac{V}{4} - \rho_2 g V + 2\rho_1 g V = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = 2\rho_1 + \frac{1}{4}\rho_0.$$

Подставим числа:

$$\rho_2 = 2 \cdot 0{,}7 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1{,}65 \text{ г/см}^3.$$

Для проверки и для картинки найдём натяжение: $T = (\rho_1 - \rho_0/4)gV = 0{,}45\,\rho_0 g V > 0$ (нить натянута).

Обратите внимание: на правое тело действует именно $2T$, а не T. Если забыть это, получится $\rho_2 = \rho_1 + \frac{1}{2}\rho_0 = 1{,}2$ г/см^3, что неверно. Погружённые объёмы разные, сила Архимеда считается по погружённой части, а не по всему объёму.



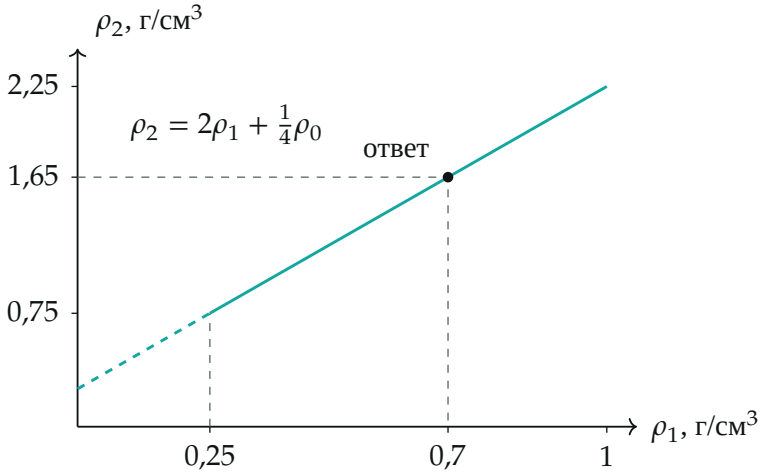
Баланс сил в единицах $\rho_0 g V$: у каждого тела сумма сил вверх (бирюзовые столбики) равна силе тяжести (серый столбик): $0{,}45 + 0{,}25 = 0{,}70$ *и* $0{,}90 + 0{,}75 = 1{,}65$

Второй способ: «золотое правило» механики. Подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза и такой же проигрыш в пути. Пусть левое тело опустилось на s; тогда нить вытянулась с левой стороны на s, и правое тело (ось подвижного блока) поднялось на $s/2$. Работа равнодействующих сил (тяжесть минус Архимед) на этих перемещениях равна

нулю при равновесии: $(m_1 g - F_{A1})\, s = (m_2 g - F_{A2})\, \dfrac{s}{2}$. Отсюда

$$m_2 g - F_{A2} = 2\,(m_1 g - F_{A1}),$$
$$\rho_2 - \tfrac{3}{4}\rho_0 = 2\left(\rho_1 - \tfrac{1}{4}\rho_0\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = 2\rho_1 + \tfrac{1}{4}\rho_0,$$

тот же ответ.



Плотность правого тела как функция плотности левого: прямая $\rho_2 = 2\rho_1 + \rho_0/4$. Слева от $\rho_1 = \rho_0/4$ натяжение нити было бы отрицательным (нить провисла, штриховая часть); точка — ответ задачи

Проверка. Размерность: ρ_2 и ρ_1 — плотности, $\rho_0/4$ тоже. Предельный случай: если $\rho_1 = \rho_0/4$, левое тело плавает с погружением в $1/4$ без нити, $T = 0$, и формула даёт $\rho_2 = \frac{3}{4}\rho_0$ — правое тело в этом случае тоже плавает, погружённое на $3/4$ (плотность тела равна доле погружения, умноженной на плотность воды). Это как раз левый конец графика. Знак: $\rho_2 > \rho_0$, правое тело тяжелее воды, оно утонуло бы без нити; нить, на которую приходится $2T$, как раз удерживает его на плаву.

Смысл. Подвижный блок удваивает силу натяжения, поэтому правое тело может быть заметно плотнее воды, а равновесие задаёт $\rho_2 = 2\rho_1 + \rho_0/4$.

Ответ. $\rho_2 = 2\rho_1 + \dfrac{\rho_0}{4} = 1{,}65$ г/см^3.