Флаг на корабле

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Флаг на корабле, плывущем по морю со скоростью v, развевается в направлении, составляющем угол α с курсом корабля (левый рисунок, направление флага показано пунктиром). Когда скорость корабля увеличилась вдвое (без изменения курса) угол между флагом и курсом стал равен β, $\beta > \alpha$ (правый рисунок). Найти скорость ветра.

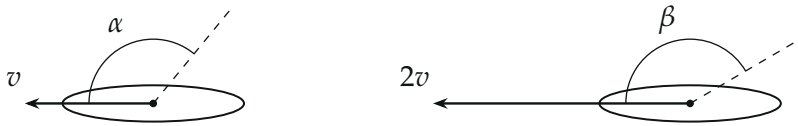


Рисунок условия: корабль (вид сверху), стрелка — скорость корабля, пунктир — направление флага, дуга — угол с курсом; справа скорость корабля вдвое больше (стрелка вдвое длиннее, у организаторов обе стрелки нарисованы одной длины)

▲ **Решение. Что происходит.** Флаг ложится по ветру, но по ветру, каким его ощущает корабль, то есть по скорости ветра относительно корабля $\vec{w}$. Ветер относительно земли не меняется (ветер один и тот же), меняется только скорость корабля, а с ней и $\vec{w}$. Класс задачи: закон сложения скоростей при переходе из одной системы отсчёта в другую. Главная идея: записать этот закон дважды (для скоростей v и $2v$), спроецировать на курс и на перпендикуляр к нему и найти две неизвестные проекции скорости ветра относительно земли.

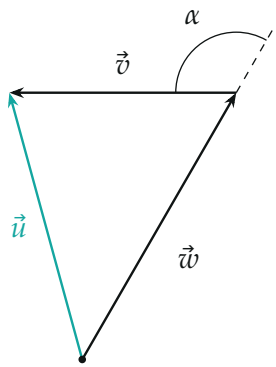
Обозначения. $\vec{u}$ — скорость ветра относительно земли (искомая по модулю), $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ — скорость ветра относительно корабля до и после увеличения скорости; флаг направлен вдоль $\vec{w}$. Скорость корабля относительно земли — $\vec{v}$ (потом $2\vec{v}$). Ось «$\parallel$» направим вдоль курса корабля (по ходу), ось «$\perp$» — перпендикулярно курсу в сторону, куда относит ветер; $u_\parallel$, $u_\perp$ — проекции $\vec{u}$ на эти оси. Углы α и β тупые: флаг относит назад, в сторону, противоположную курсу (как на рисунке).

1. Закон сложения скоростей. Скорость ветра относительно земли равна сумме скорости ветра относительно корабля и скорости корабля

относительно земли:

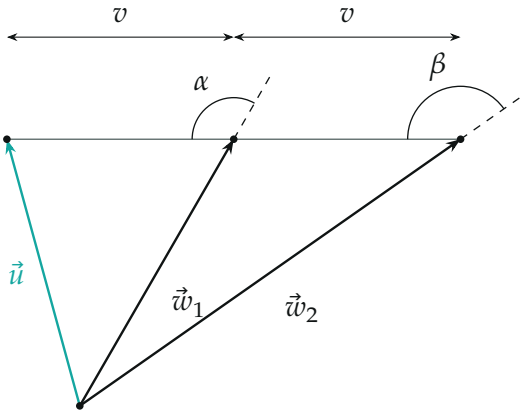
$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}_{\text{корабля}}.$$

Это треугольник: вектор $\vec{w}$, к его концу приставлен вектор скорости корабля, их сумма — $\vec{u}$.



Треугольник сложения скоростей для первого случая (чертёж по примеру $\alpha = 120°$): $\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$; пунктир — продолжение направления флага, α — угол между курсом (вектор $\vec{v}$) и флагом

2. Что одинаково в двух случаях. Вектор $\vec{u}$ один и тот же (ветер не изменился), курс тот же. Поэтому в обоих треугольниках общая сторона $\vec{u}$, а скорость корабля откладывается вдоль одной прямой, параллельной курсу: сначала v, потом $2v$. Концы векторов $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ лежат на этой прямой на расстоянии v друг от друга.

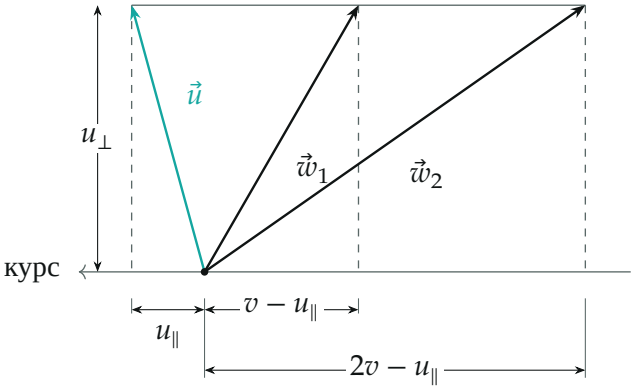


Оба случая на одном чертеже (пример $\alpha = 120°$, $\beta = 145°$): общий вектор $\vec{u}$ (бирюзовый) и два вектора $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, концы которых отстоят друг от друга на v вдоль курса

3. Проекции и углы. Спроецируем $\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}_{\text{корабля}}$ на оси. Проекция скорости ветра относительно земли на курс — $u_\parallel$, на перпендикуляр — $u_\perp$. Проекция $\vec{w}$ на курс равна $u_\parallel - v$ (в первом случае) и $u_\parallel - 2v$ (во втором), на перпендикуляр — $u_\perp$ в обоих случаях. Направление флага — направление $\vec{w}$; угол между флагом и курсом тупой, поэтому удобно взять тангенсы острых углов $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$ (отношение противолежащего катета к прилежащему):

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_\perp}{v - u_\parallel}, \qquad \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = \frac{u_\perp}{2v - u_\parallel}.$$

Знаменатели положительны: по условию α и β тупые, флаг лежит позади курса.



Проекции на курс (горизонталь) и на перпендикуляр: катеты в прямоугольных треугольниках с гипотенузами $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ равны $u_\perp$ и $v - u_\parallel$, $u_\perp$ и $2v - u_\parallel$

4. Находим проекции. Неизвестных две, $u_\parallel$ и $u_\perp$, уравнений два. Выразим $u_\perp$ из обоих и приравняем:

$$u_\perp = -\operatorname{tg}\alpha\,(v - u_\parallel) = -\operatorname{tg}\beta\,(2v - u_\parallel).$$

Раскроем скобки и соберём слагаемые с $u_\parallel$: $u_\parallel(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = v\,(2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$. Домножим числитель и знаменатель на -1 и подставим результат

в первое выражение для $u_\perp$:

$$u_\parallel = v\,\frac{\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}, \qquad u_\perp = -v\,\frac{\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$$

5. Модуль скорости ветра. Проекции взаимно перпендикулярны, поэтому по теореме Пифагора

$$u = \sqrt{u_\parallel^2 + u_\perp^2} = v\,\frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\beta)^2 + \operatorname{tg}^2\alpha\,\operatorname{tg}^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$

Обратите внимание: у тупых углов $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$ (тангенс возрастает от $-\infty$ до 0 на промежутке от 90° до 180°), поэтому разность $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$ отрицательна и в знаменателе стоит модуль $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$, иначе скорость получилась бы отрицательной. Условие $\beta > \alpha$ существенно: при $\beta = \alpha$ знаменатель нулевой, и такого ветра нет.

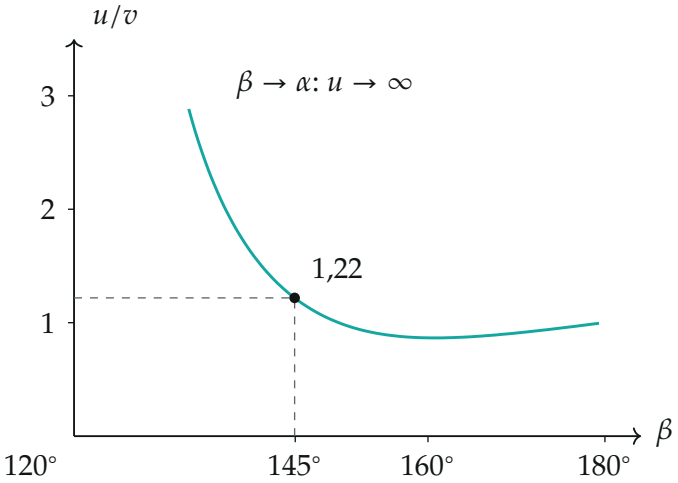
Числовой пример и второй способ. Пусть $\alpha = 120°$, $\beta = 145°$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}732$, $\operatorname{tg}\beta = -0{,}700$, и по формулам $u_\parallel = 0{,}321\,v$, $u_\perp = 1{,}175\,v$, $u = 1{,}22\,v$. Проверим теоремой синусов в треугольниках сложения. Пусть φ — угол между $\vec{u}$ и $\vec{v}_1$. В первом треугольнике

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin\varphi} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi = \frac{v\sin 120°}{u} = 0{,}711, \quad \varphi = 45{,}3°.$$

Угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равен $\beta - \alpha = 25°$, поэтому во втором треугольнике $\vec{u}$ составляет с $\vec{v}_2$ угол $\varphi + 25°$, и

$$\sin(\varphi + 25°) = \sin 70{,}3° = 0{,}941, \qquad \frac{2v\sin\beta}{u} = \frac{2\cdot 0{,}574}{1{,}22} = 0{,}941,$$

что и требует теорема синусов $\dfrac{u}{\sin\beta} = \dfrac{2v}{\sin(\varphi + 25°)}$: результат подтверждён независимо.



Скорость ветра u/v как функция β при $\alpha = 120°$: при $\beta \to \alpha$ ветер неограниченно растёт, при $\beta \to 180°$ стремится к v; точка — пример $\beta = 145°$, $u \approx 1{,}22v$

Проверка. Размерность: ответ — v, умноженная на безразмерное отношение, это скорость. Предельные случаи (график выше): при $\beta \to 180°$ (флаг лежит строго по курсу назад при скорости $2v$) $\operatorname{tg}\beta \to 0$, $u \to v\,|\operatorname{tg}\alpha|/|\operatorname{tg}\alpha| = v$: ветер дует вдоль курса со скоростью корабля, и при скорости v относительного ветра нет вовсе. При $\beta \to \alpha$ флаг не реагирует на удвоение скорости, и это возможно только при бесконечно большой скорости ветра, что согласуется с $u \to \infty$.

Смысл. Флаг показывает ветер относительно корабля, а скорость ветра относительно земли постоянна, и двух наблюдений при разных скоростях корабля хватает, чтобы найти и её величину, и направление.

Ответ. $u = v\,\dfrac{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\beta)^2 + \operatorname{tg}^2\alpha\,\operatorname{tg}^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$ (скорость ветра относительно земли; $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$ у тупых углов).