Пенопластовый брусок с гирями

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 1] На поверхности воды плавает брусок из пенопласта в форме прямоугольного параллелепипеда. Когда на поверхность бруска поставили три одинаковые гири, он погрузился в воду на половину своего объёма. А когда на поверхность бруска поставили 7 точно таких же гирь, то его верхняя грань оказалась на одном уровне с поверхностью воды. Найти отношение плотности пенопласта к плотности воды.

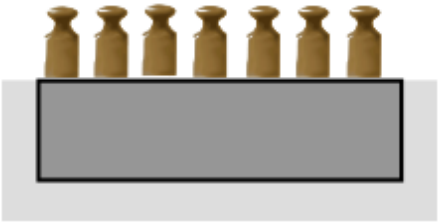
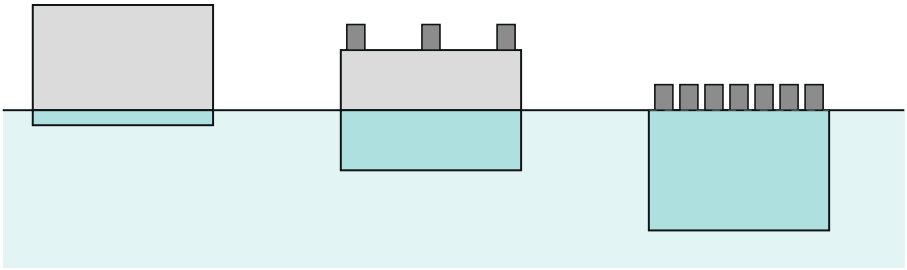


Рисунок условия: брусок на воде, на верхней грани стоят гири

▲ **Решение. Что происходит.** Брусок плавает, значит, сила тяжести, действующая на брусок с гирями, равна силе Архимеда — весу воды, вытесненной погружённой частью бруска. Гири стоят сверху и в воду не попадают, поэтому воду вытесняет только брусок. С тремя гирями брусок погружён наполовину, с семью — целиком (верхняя грань вровень с водой). Это два уравнения равновесия. Неизвестных в них три (масса бруска, масса гири, объём), но нужна лишь комбинация $M/(\rho_0 V)$, и массу гири удастся исключить. Главная идея — записать равновесие в двух состояниях и вычесть одно из другого.

Обозначения. M и V — масса и объём бруска, m — масса одной гири, $\rho = M/V$ — плотность пенопласта, ρ_0 — плотность воды, $V_{\text{погр}}$ — объём погружённой части бруска.



Три состояния бруска: слева — без гирь (глубина погружения неизвестна), в середине — с тремя гирями (погружён на половину объёма), справа — с семью (верхняя грань на уровне воды)

1. Закон плавания. Для системы «брусок + гири», покоящейся на воде, сила тяжести уравновешена силой Архимеда, направленной вверх:

$$(M + nm)\, g = \rho_0\, g\, V_{\text{погр}}.$$

Здесь n — число гирь. Ось — вертикаль, обе силы направлены вдоль неё, поэтому проекции записываем по модулю.

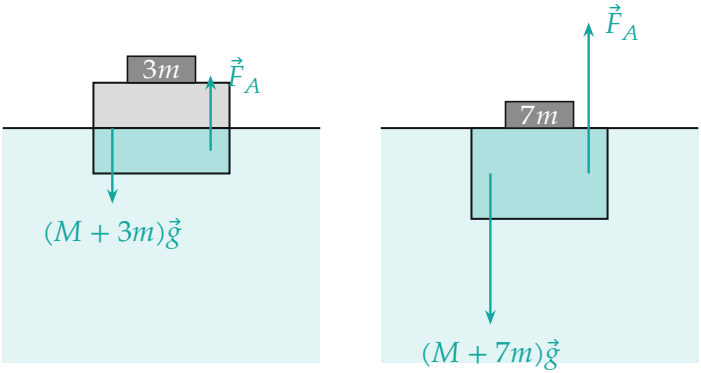
2. Три гири. Брусок погружён на половину своего объёма, $V_{\text{погр}} = V/2$:

$$Mg + 3mg = \rho_0 g\, \frac{V}{2}. \qquad (1)$$

3. Семь гирь. Верхняя грань на уровне воды: брусок погружён целиком, $V_{\text{погр}} = V$:

$$Mg + 7mg = \rho_0 g\, V. \qquad (2)$$

Обратите внимание: «на одном уровне с поверхностью» значит именно полное погружение, $V_{\text{погр}} = V$; это предельное состояние, ещё одна гиря утопила бы брусок.



Силы на систему «брусок + гири»: сила Архимеда вверх, сила тяжести вниз. Слева — три гири ($F_A = \rho_0 g V/2$), справа — семь ($F_A = \rho_0 g V$); в каждом случае стрелки равны по длине

4. Исключаем массу гири. Вычтем (1) из (2): $4mg = \rho_0 g V - \rho_0 g V/2 = \rho_0 g V/2$, откуда

$$m = \frac{\rho_0 V}{8}.$$

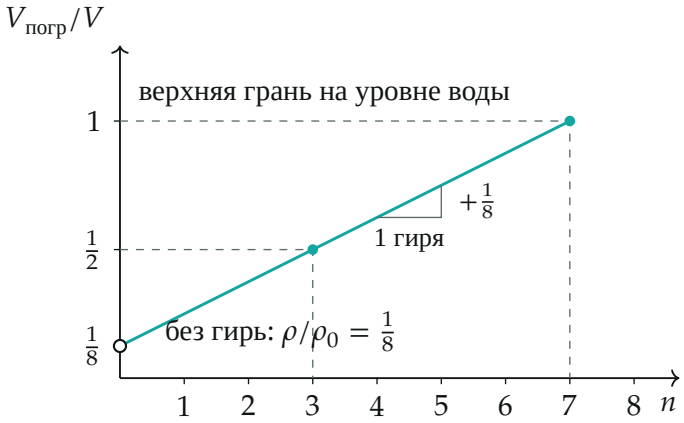
Подставим в (2):

$$M = \rho_0 V - 7m = \rho_0 V - \frac{7\rho_0 V}{8} = \frac{\rho_0 V}{8}.$$

(Можно, как у организаторов, умножить (1) на 7, (2) — на 3 и вычесть: $4Mg = \rho_0 g V/2$ — то же самое.) Интересно, что гиря по массе равна самому бруску: $m = M$.

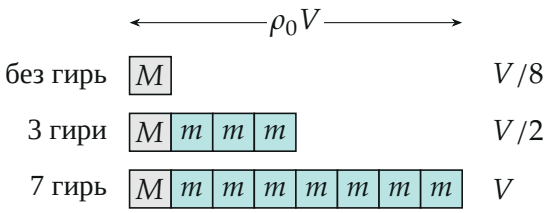
5. Плотность. По определению $\rho = M/V$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M}{\rho_0 V} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$



Доля погружённого объёма в зависимости от числа гирь: каждая гиря добавляет $1/8$. Прямая, продолженная до $n = 0$, даёт искомое ρ/ρ_0

Второй способ: что добавляет каждая гиря. Брусок плавает, пока $V_{\text{погр}} < V$, и погружение растёт на одну и ту же величину с каждой гирей: сила Архимеда должна вырасти на mg, значит, $V_{\text{погр}}$ растёт на $mg/(\rho_0 g) = m/\rho_0$. От трёх гирь до семи — четыре гири — погружение выросло с $V/2$ до V, то есть на $V/2$. Поэтому одна гиря даёт $V/8$. Три гири дают $3V/8$, а всё погружение $V/2$; значит, на собственный вес бруска приходится $V/2 - 3V/8 = V/8$. Вес бруска равен весу воды в объёме $V/8$: $\rho V = \rho_0 V/8$, откуда $\rho/\rho_0 = 1/8$.



Массы в клетках по $\rho_0 V/8$ (масса воды в объёме $V/8$): брусок занимает одну клетку, каждая гиря — ещё одну; число клеток — погружённая доля объёма из восьми

Проверка. Величина ρ/ρ_0 безразмерна. Подставим $M = m = \rho_0 V/8$ обратно: в (1) $Mg + 3mg = 4\rho_0 gV/8 = \rho_0 gV/2$ — верно; в (2) $8\rho_0 gV/8 = \rho_0 gV$ — верно. Правдоподобие: $\rho = \rho_0/8 \approx 125$ кг/м^3 —

обычная плотность пенопласта, меньше плотности воды, так что без гирь брусок плавал бы, погрузившись на $1/8$ объёма (это значение на графике при $n = 0$).

Смысл. Плотность тела, плавающего на воде, равна доле его объёма, погружённой в воду без нагрузки. Сами гири нужны, чтобы по двум нагруженным состояниям найти эту долю: она продолжает прямую в точку $n = 0$.

Ответ. $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125.$