Сопротивление цепи по схеме

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 2] Найти сопротивление электрической цепи, схема которой показана на рисунке. Известно, что $R = 10$ Ом. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

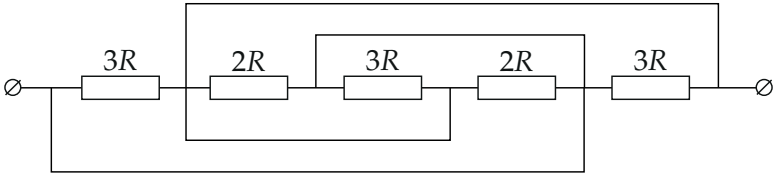
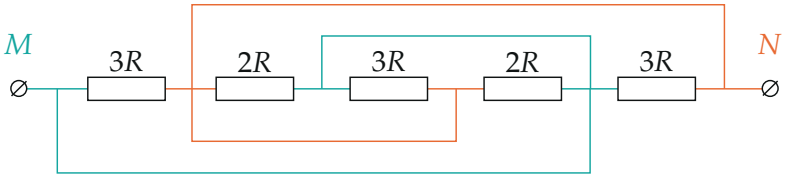


Рисунок условия: пять резисторов 3R, 2R, 3R, 2R, 3R и четыре соединительных провода, идущих над и под рядом резисторов

▲ **Решение. Что происходит.** Схема выглядит запутанной, но у неё одно свойство: соединительные провода не имеют сопротивления, поэтому потенциал во всех точках, связанных проводом, один и тот же — это один узел. Важно не то, как резисторы расположены на листе, а между какими узлами каждый из них стоит. Главная идея — найти все узлы, раскрасить провода по узлам и посмотреть, какие резисторы окажутся между одной и той же парой узлов. Класс задачи: «деформация проводов», после которой цепь сводится к параллельному или последовательному соединению.

Обозначения. Резисторы слева направо назовём $R_1 = 3R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 2R$, $R_5 = 3R$. Узел M — левый вывод цепи, узел N — правый вывод; $R_{об}$ — искомое общее сопротивление.

1. Узлы. Пройдём по проводам. С левым выводом связаны: левый конец R_1; нижний длинный провод, который приходит в точку между R_4 и R_5; ещё один провод поверх R_3–R_4 соединяет эту точку с точкой между R_2 и R_3. Всё это — узел M. С правым выводом связаны: правый конец R_5; верхний длинный провод, который идёт к точке между R_1 и R_2; нижний короткий провод соединяет её с точкой между R_3 и R_4. Это узел N.

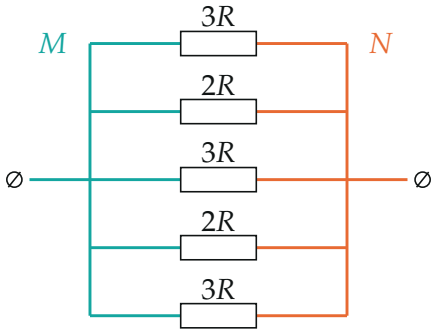


Провода, соединённые без резисторов, одного цвета: бирюзовые — узел M (левый вывод), оранжевые — узел N (правый вывод)

2. Концы резисторов. Теперь посмотрим, с какими узлами соединён каждый резистор:

- R_1: левый конец — M, правый (точка между R_1 и R_2) — N;
- R_2: левый конец — N, правый (точка между R_2 и R_3) — M;
- R_3: левый конец — M, правый (между R_3 и R_4) — N;
- R_4: левый — N, правый (между R_4 и R_5) — M;
- R_5: левый — M, правый — N.

Каждый из пяти резисторов стоит между M и N — значит, они соединены параллельно. Обратите внимание: на схеме они идут подряд, но это обманчиво: если бы провода были другими, то соединение могло бы оказаться и последовательным. Решает только то, к каким узлам подключены концы.



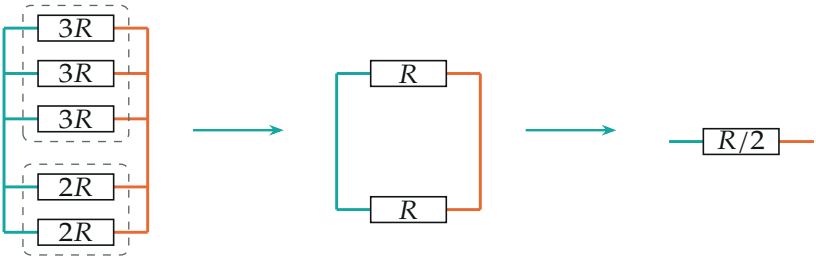
Та же цепь после деформации проводов: два провода-шины (узлы M и N) и пять резисторов между ними

3. Параллельное соединение. Проводимость параллельных ветвей

складывается: $\dfrac{1}{R_{об}} = \sum \dfrac{1}{R_i}$. Для нашей цепи

$$\frac{1}{R_{об}} = \frac{1}{3R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{3R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{3R} = \frac{3}{3R}+\frac{2}{2R} = \frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{об} = \frac{R}{2} = 5\,\text{Ом}.$$

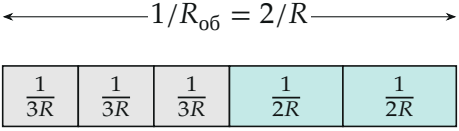
Тот же результат даёт соединение по группам: три резистора $3R$ параллельно дают R, два резистора $2R$ параллельно дают R, а два сопротивления R параллельно — $R/2$.



Свёртка по группам: три резистора $3R$ заменяются одним R, два $2R$ — одним R, а два R в параллель — одним $R/2$

Второй способ: через токи. Приложим к цепи напряжение U между M и N. Напряжение на каждом резисторе равно U, поэтому токи — $U/(3R)$ в трёх ветвях и $U/(2R)$ в двух. Полный ток

$$I = 3\cdot\frac{U}{3R}+2\cdot\frac{U}{2R} = \frac{2U}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{об} = \frac{U}{I} = \frac{R}{2}.$$



Проводимости ветвей складываются: $3\cdot\dfrac{1}{3R}+2\cdot\dfrac{1}{2R} = \dfrac{2}{R}$. Ширина каждого столбика — проводимость ветви

Проверка. Размерность: $R_{об}$ измеряется в омах. Общее сопротивление параллельного соединения меньше наименьшего из сопротивлений

ветвей: $R/2 = 5$ Ом меньше $2R = 20$ Ом — верно. Для сравнения: если бы те же пять резисторов стояли последовательно, получилось бы $13R = 130$ Ом — совсем другое число; значит, понимание схемы здесь важнее арифметики.

Смысл. Провода без сопротивления можно растягивать, сгибать и переставлять: цепь от этого не меняется, пока не меняются узлы, к которым подключены концы резисторов.

Ответ. $R_{\text{об}} = \dfrac{R}{2} = 5$ Ом.