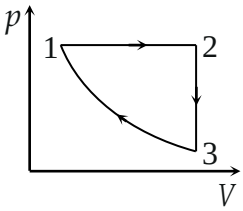
Цикл: изобара, изохора, изотерма

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 3] «Цикл: изобара, изохора, изотерма».

С одним молем одноатомного идеального газа происходит циклический процесс 1-2-3-1, состоящий из изобары 1-2, изохоры 2-3 и изотермы 3-1 (см. рисунок, на котором приведена зависимость давления газа от его объёма для данного процесса). Известно, что работа, совершённая над газом в изотермическом процессе, составляет $3/4$ от работы газа в изобарическом процессе. Найти термодинамический КПД циклического процесса 1-2-3-1.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на КПД цикла идеального газа. КПД — это отношение работы газа за цикл к теплоте, которую газ получил от нагревателя за цикл:

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_+}.$$

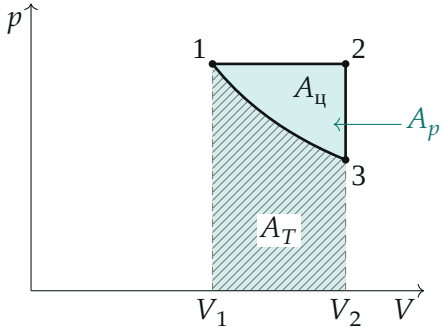
Значит, план такой: по каждому участку понять знак теплоты (где газ берёт тепло, где отдаёт), затем выразить через работу на изобаре и работу за цикл, и полученную теплоту. Площадь под графиком в координатах p–V — это работа, поэтому всё удобно видеть на рисунке.

Обозначения. A_p — работа газа на изобаре 1-2; A_T — работа внешних сил над газом на изотерме 3-1 (по условию $A_T = \frac{3}{4}A_p$); $A_\text{ц}$ — работа газа за цикл; Q_{12}, Q_{23}, Q_{31} — теплота, полученная газом на участках; $\nu = 1$ моль.

1. Работа за цикл. Работа газа на участке — площадь под графиком $p(V)$: при расширении она положительна, при сжатии отрицательна. На изобаре 1-2 газ расширяется и совершает работу $A_p = p_1(V_2 - V_1)$ — площадь прямоугольника под отрезком 1-2. На изохоре 2-3 объём не меняется, работа равна нулю. На изотерме 3-1 газ сжимается: работа газа равна $-A_T$ (площадь под кривой 3-1 со знаком минус). Сумма:

$$A_\text{ц} = A_p + 0 - A_T = A_p - \frac{3}{4}A_p = \frac{1}{4}A_p.$$

Геометрически это площадь внутри цикла: прямоугольник под изобарой минус криволинейная трапеция под изотермой.



Работа газа на изобаре A_p — вся площадь под отрезком 1-2 (бирюзовая заливка); работа над газом на изотерме A_T — заштрихованная площадь под кривой 3-1; работа за цикл $A_ц$ — незаштрихованная часть, площадь внутри цикла. Изотерма построена по расчёту: $V_2/V_1 = 1{,}73$

2. Где газ получает тепло. По первому закону термодинамики для каждого участка $Q = \Delta U + A$, где $U = \frac{3}{2}\nu RT$ — внутренняя энергия одноатомного газа.

Изобара 1-2. Объём растёт при постоянном давлении, значит, по уравнению Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$ растёт и температура. Тогда

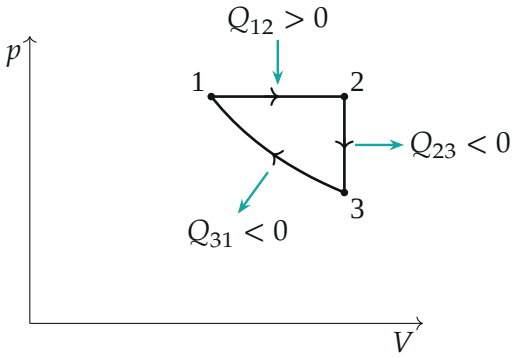
$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}p_1(V_2 - V_1) = \frac{3}{2}A_p,$$

$$Q_{12} = \frac{3}{2}A_p + A_p = \frac{5}{2}A_p > 0.$$

Газ *получает* тепло.

Изохора 2-3. Работы нет, давление падает при постоянном объёме — температура падает, $\Delta U_{23} < 0$, значит, $Q_{23} = \Delta U_{23} < 0$: газ тепло *отдаёт*.

Изотерма 3-1. Температура постоянна, $\Delta U_{31} = 0$, и $Q_{31} = -A_T < 0$: газ сжимают, и всю работу внешних сил он отдаёт теплом холодильнику.



Обход цикла по часовой стрелке (работа за цикл положительна); тепло газ получает только на изобаре 1-2, на изохоре и изотерме отдаёт

Поэтому теплота, полученная от нагревателя за цикл,

$$Q_+ = Q_{12} = \frac{5}{2}A_p.$$

3. КПД.

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_+} = \frac{\frac{1}{4}A_p}{\frac{5}{2}A_p} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

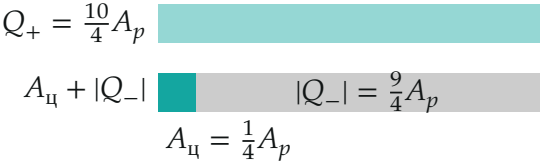
Обратите внимание. В знаменатель КПД идёт только *полученная* теплота Q_{12}, а не сумма теплот всех участков: сумма $Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$ равна работе за цикл ($\Delta U_\text{ц} = 0$), и «КПД» с такой суммой в знаменателе всегда был бы равен единице.

Проверка. Баланс энергии за цикл. Изохора 2-3 возвращает газ на температуру T_1 (точка 3 лежит на изотерме точки 1), поэтому $\Delta U_{23} = -\Delta U_{12} = -\frac{3}{2}A_p$. Отданная теплота $|Q_-| = |Q_{23}| + |Q_{31}| = \frac{3}{2}A_p + \frac{3}{4}A_p =$

$\frac{9}{4}A_p$. Сумма теплот:

$$Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = \frac{5}{2}A_p - \frac{3}{2}A_p - \frac{3}{4}A_p = \frac{1}{4}A_p = A_{\text{ц}},$$

как и требует первый закон за цикл. Отданная холодильнику теплота $\frac{9}{4}A_p$ в девять раз больше работы, отсюда и малый КПД $1/10$.



Энергетический баланс цикла (длины полос пропорциональны величинам): из полученных $\frac{10}{4}A_p$ в работу идёт только $\frac{1}{4}A_p$

Смысл: КПД мал, потому что работа сжатия на изотерме почти съедает работу расширения на изобаре, а нагрев на изобаре требует теплоты в $5/2$ раза больше работы.

Ответ. $\eta = \dfrac{1}{10} = 0{,}1.$