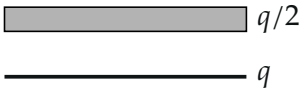
Толстая пластина и тонкая

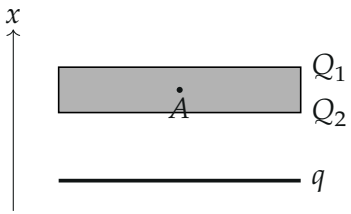
Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 4] «Толстая пластина и тонкая».

Толстую металлическую пластину, заряженную зарядом $q/2$, расположили параллельно тонкой металлической пластинке, заряженной зарядом q (см. рисунок). Найти заряды верхней и нижней поверхностей толстой металлической пластины. Размеры пластин много больше толщины металлической пластины и расстояния между пластинами.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на проводник в электростатическом поле. Заряд толстой пластины распределяется по двум её поверхностям — верхней и нижней, — и распределяется так, чтобы поле внутри металла было равно нулю: иначе свободные электроны двигались бы и равновесия не было бы. Все три заряженные поверхности (две поверхности толстой пластины и тонкая пластинка) — большие плоскости, поле каждой из них однородно и не зависит от расстояния. Два неизвестных заряда — два уравнения: сохранение заряда и $E = 0$ внутри металла.

Обозначения. Q_1 и Q_2 — заряды верхней и нижней поверхностей толстой пластины (со знаками); S — площадь пластин; ось x — вверх, перпендикулярно пластинам; $E_0 = \dfrac{q}{2\varepsilon_0 S}$ — модуль поля тонкой пластинки.



Заряды поверхностей толстой пластины Q_1, Q_2 и заряд тонкой пластинки q; A — точка внутри металла, ось x вверх

1. Закон сохранения заряда. Толстая пластина изолирована, её полный заряд $q/2$ лишь перераспределяется между поверхностями:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{q}{2}.$$

2. Поле заряженной плоскости. Большая равномерно заряженная плоскость с зарядом Q (со знаком) создаёт по обе стороны однородное поле модулем $\dfrac{|Q|}{2\varepsilon_0 S}$, направленное от плоскости при $Q > 0$ и к ней при $Q < 0$. Для проекции на ось x:

$$E_x = +\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ выше плоскости,} \qquad E_x = -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ ниже плоскости.}$$

Знак заряда эта запись учитывает сама, поэтому заранее угадывать знаки Q_1, Q_2 не нужно.

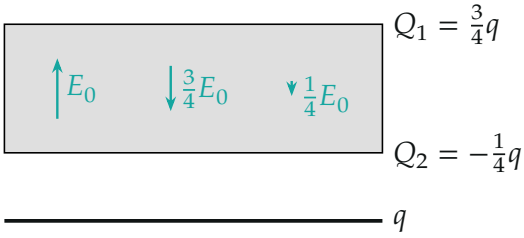
3. Поле внутри металла равно нулю. По принципу суперпозиции в точке A складываются поля трёх плоскостей. Точка A лежит выше тонкой пластинки и выше нижней поверхности, но ниже верхней поверхности:

$$E_x(A) = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_1 - Q_2 = q.$$

4. Решаем систему. Сложим и вычтем уравнения пунктов 1 и 3:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2} + q\right) = \frac{3q}{4}, \qquad Q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2} - q\right) = -\frac{q}{4}.$$

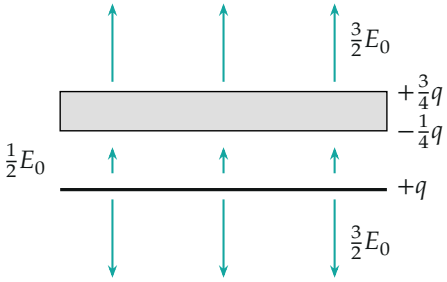
Нижняя поверхность заряжена *отрицательно*: положительная пластинка q притягивает к ближней стороне электроны, а на дальней стороне остаётся избыток положительного заряда.



Толщина пластины увеличена. Поля трёх плоскостей внутри металла (длины стрелок пропорциональны): вверх E_0 от пластинки q, вниз $\frac{3}{4}E_0$ от Q_1 и $\frac{1}{4}E_0$ от Q_2 — сумма ноль

Обратите внимание. Заряды поверхностей нельзя искать «по половине» на каждую сторону, как у одиночной пластины: соседняя заряженная пластинка перераспределяет заряд. Зато у внешних поверхностей всей системы есть простое правило: верхняя поверхность несёт половину *полного* заряда системы $\frac{1}{2}(q + \frac{q}{2}) = \frac{3}{4}q$ — это и есть Q_1.

Проверка. Второй способ — через поле вне пластин. Над системой поле создают все заряды, $E = \dfrac{q + q/2}{2\varepsilon_0 S} = \dfrac{3q}{4\varepsilon_0 S}$; у поверхности проводника поле равно σ/ε_0, то есть $Q_1/(\varepsilon_0 S)$, откуда $Q_1 = \frac{3}{4}q$. В зазоре между пластинами поле по суперпозиции $\dfrac{q - q/2}{2\varepsilon_0 S} = \dfrac{q}{4\varepsilon_0 S}$ и направлено вверх, к пластине, — значит, нижняя поверхность заряжена отрицательно, $|Q_2| = \frac{1}{4}q$. Совпало. Размерность: заряды выражены через q.



Поле во всех областях (длины стрелок пропорциональны модулю, $E_0 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$): снаружи $\frac{3}{2}E_0$, в зазоре $\frac{1}{2}E_0$ вверх, внутри металла ноль

Смысл: проводник подстраивает заряды поверхностей так, чтобы внутри него поле исчезло; ближняя к заряженной пластинке поверхность приобретает заряд противоположного знака.

Ответ. Верхняя поверхность $Q_1 = \dfrac{3q}{4}$, нижняя $Q_2 = -\dfrac{q}{4}$.