Стержень с двумя грузами в лунке

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 5] «Стержень с двумя грузами в лунке».

К концам жёсткого невесомого стержня прикреплены два точечных тела с массами m и $3m$. Стержень удерживают в горизонтальном положении в сферической лунке, радиус которой равен длине стержня (см. рисунок). В некоторый момент времени стержень отпускают. Найти ускорение центра стержня и силу его натяжения сразу после освобождения. Трение отсутствует.

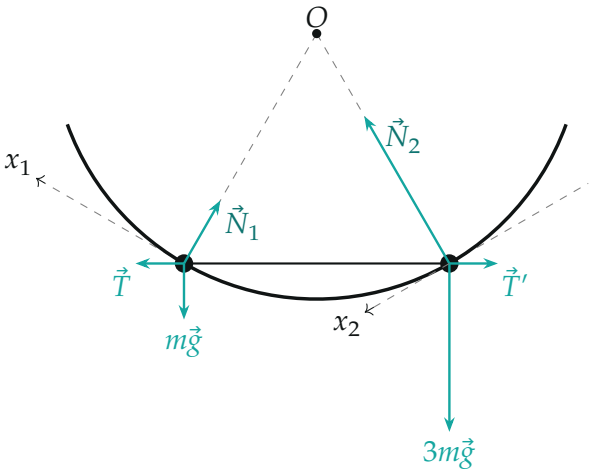


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на динамику связанных тел, в первый момент после отпускания. Скорости тел ещё равны нулю, поэтому центростремительных ускорений нет: каждое тело ускоряется только *вдоль поверхности лунки* (по касательной). Тяжёлое тело $3m$ тянет систему вниз, лёгкое m поднимается. Стержень невесомый, поэтому на тела он действует только вдоль себя — это сила T, одинаковая на обоих концах. Связь концов — стержень не меняет длины — даёт соотношение между ускорениями.

Обозначения. O — центр лунки, R — её радиус и длина стержня; A и B — тела m и $3m$; $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ — силы реакции лунки; T — сила, с которой стержень действует на каждое тело; a_1, a_2 — ускорения тел; a_c — ускорение середины стержня C.

1. Геометрия. Треугольник OAB равносторонний: $OA = OB = R$ (радиусы) и $AB = R$ (стержень). Поэтому радиусы OA и OB наклонены к горизонтальному стержню под углом $60°$, а касательные к лунке в точках A и B (они перпендикулярны радиусам) — под углом $30°$ к горизонту, то есть под $60°$ к вертикали.

2. Силы. На каждое тело действуют сила тяжести, сила реакции лунки (по радиусу к центру O, трения нет) и сила со стороны стержня. Стержень невесом, поэтому сумма сил и моментов на него равна нулю — силы на его концах направлены вдоль него и равны. Направление T на рисунке выбрано так, что стержень *сжат* (толкает тела наружу); если получится $T < 0$ — стержень растянут.



Силы, действующие на тела (длины стрелок пропорциональны модулям, найденным ниже), касательные к лунке пунктиром: ось x_1 — вверх по лунке для тела m, ось x_2 — вниз по лунке для тела $3m$

3. Второй закон Ньютона вдоль касательных. Ось x_1 для тела m направим по касательной вверх по лунке, ось x_2 для тела $3m$ — по касательной вниз: так оба ускорения будут положительными. Сила реакции перпендикулярна касательной и в проекции не входит. Сила тяжести составляет с касательной угол 60°, горизонтальная сила T — угол 30°:

$$ma_1 = T\cos 30^\circ - mg\cos 60^\circ, \qquad 3ma_2 = 3mg\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ.$$

4. Связь ускорений. Стержень не меняет длины, поэтому проекции скоростей его концов на направление стержня равны в любой момент; значит, равны и проекции ускорений (в момент, когда скорости нулевые,

дополнительного вклада от поворота стержня нет). Обе касательные составляют со стержнем угол 30°:

$$a_1 \cos 30^\circ = a_2 \cos 30^\circ \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 \equiv a.$$

5. Решаем. Сложим уравнения пункта 3 — T сокращается:

$$4ma = 2mg \cos 60^\circ = mg \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{g}{4}.$$

Из первого уравнения:

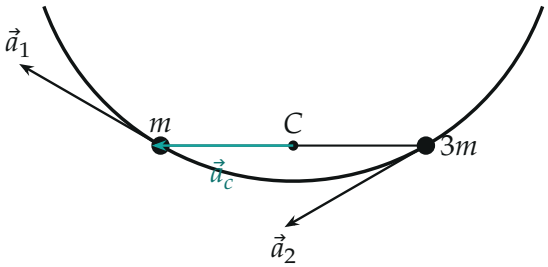
$$T \cos 30^\circ = ma + \frac{mg}{2} = \frac{3}{4}mg \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{3mg}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}mg.$$

$T > 0$ — стержень сжат: он толкает лёгкое тело вверх, помогая ему подниматься, и тормозит тяжёлое.

6. Ускорение центра. Середина стержня C движется с ускорением $\vec{a}_c = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ равны по модулю, оба направлены под углом 30° к горизонтали в сторону лёгкого тела, но один вверх, другой вниз. Вертикальные проекции взаимно уничтожаются, горизонтальные складываются:

$$a_c = \frac{1}{2} \cdot 2a \cos 30^\circ = \frac{g}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}g,$$

направлено горизонтально, вдоль стержня, в сторону лёгкого тела.



Ускорения тел в первый момент направлены по касательным к лунке; $\vec{a}_c =$

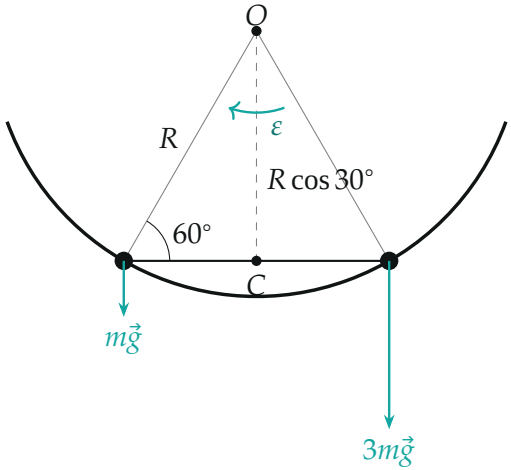
$\frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$ — *горизонтально в сторону лёгкого тела (длины по расчёту:* $a = g/4$, $a_c = \frac{\sqrt{3}}{8}g$)

Обратите внимание. Связь «проекции ускорений концов на стержень равны» верна только потому, что скорости нулевые. Позже, когда стержень поворачивается, у каждого конца появляется центростремительная составляющая, и связь усложняется.

Проверка. Второй способ — вращение. Треугольник OAB жёсткий, поэтому стержень с грузами вращается вокруг неподвижной точки O. Уравнение моментов относительно O (силы реакции идут через O, их моменты равны нулю; плечи сил тяжести $R/2$):

$$(mR^2 + 3mR^2)\varepsilon = 3mg\frac{R}{2} - mg\frac{R}{2} = mgR \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{g}{4R}.$$

Тогда ускорение тел $a = \varepsilon R = g/4$, а середина C находится на расстоянии $OC = R\cos 30^\circ$ от оси, и $a_c = \varepsilon \cdot OC = \frac{\sqrt{3}}{8}g$ — совпало. Силы реакции положительны (python): $N_1 \approx 1{,}30\,mg$, $N_2 \approx 3{,}03\,mg$, тела от лунки не отрываются. Предел: при равных массах $a = 0$ — равновесие, как и должно быть.



Второй способ: жёсткий треугольник OAB поворачивается вокруг центра лунки; момент тяжести $3m$ больше, и угловое ускорение ε направлено по часовой стрелке

Смысл: в первый момент система ведёт себя как маятник с неподвижной осью в центре лунки, поэтому середина стержня начинает двигаться по касательной к своей окружности — горизонтально.

Ответ. $a_c = \dfrac{\sqrt{3}}{8}g$, направлено горизонтально в сторону лёгкого тела; сила со стороны стержня $T = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg$, стержень сжат.