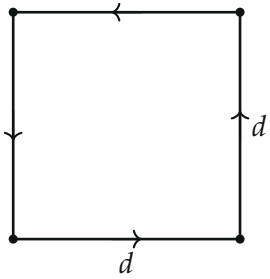
Обход квадрата за минимальное время

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 1] «Обход квадрата за минимальное время».

Маленькое тело движется по периметру квадрата со стороной d. Ускорение тела по величине не превосходит значения a (в том числе и при поворотах в вершинах квадрата). За какое минимальное время тело может совершить 2 полных обхода всего периметра?



Поясняющий рисунок: тело обходит квадрат со стороной d

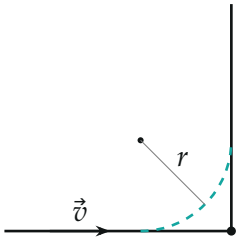
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на оптимальное движение с ограниченным ускорением. Чтобы пройти путь быстрее, надо ехать как можно быстрее, но ускорение ограничено — и при разгоне, и при торможении, и на поворотах. Главное наблюдение: в вершине квадрата направление скорости меняется скачком, на поворот нулевого радиуса. Это возможно без бесконечного ускорения только при нулевой скорости. Значит, каждая сторона — отдельный участок «старт с места — финиш с остановкой», и задача сводится к одной стороне.

Обозначения. v — скорость тела; t_0 — время разгона на стороне; τ — время прохождения одной стороны; t — искомое время двух обходов.

1. В вершинах тело должно остановиться. Пусть тело проходит вершину со скоростью $v \neq 0$. Поворот на 90° можно представить как движение по дуге радиуса r; центростремительное ускорение на дуге

$$a_\text{ц} = \frac{v^2}{r} \leq a \quad \Longrightarrow \quad r \geq \frac{v^2}{a} > 0.$$

Но тело движется *по периметру*, точно через вершину: радиус поворота $r \to 0$, и ускорение v^2/r неограниченно растёт. Поэтому в каждой вершине $v = 0$.



Повернуть со скоростью v можно только по дуге радиуса $r \geq v^2/a$ (бирюзовый пунктир), а путь проходит точно через вершину — радиус нулевой

2. Самый быстрый проход одной стороны. Тело стартует из вершины с нулевой скоростью и должно прийти в следующую вершину тоже с нулевой. Чем быстрее ехать, тем меньше время, поэтому выгодно разгоняться с максимальным ускорением a, а затем тормозить с максимальным ускорением a. Строго: за время t' от старта скорость не может превысить at', а за время $\tau - t'$ до остановки — не больше $a(\tau - t')$. Значит, график $v(t)$ лежит под «треугольником», и пройденный путь (площадь под графиком) не больше площади треугольника. Чтобы набрать путь d за наименьшее τ, график должен совпасть с треугольником.

По симметрии разгон занимает половину стороны. Уравнение равноускоренного движения из покоя на пути $d/2$:

$$\frac{d}{2} = \frac{at_0^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{d}{a}}, \qquad \tau = 2t_0 = 2\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

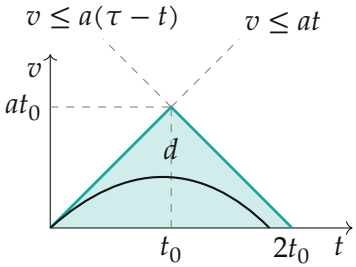
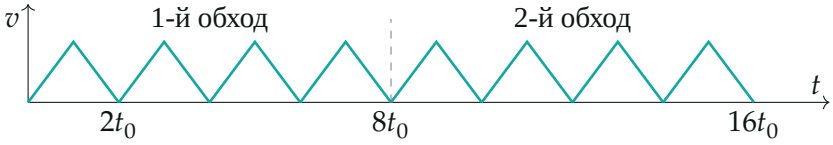


График $v(t)$ на одной стороне: оптимальный — треугольник (бирюзовый), его площадь d; любой другой допустимый график (чёрная кривая) лежит под границами $v \le at$ и $v \le a(\tau - t)$ и даёт меньший путь за то же время

3. Два обхода. Периметр — 4 стороны, два обхода — 8 сторон, и на каждой тело останавливается в конце. Время каждой стороны одно и то же, $2t_0$:

$$t = 8\tau = 16t_0 = 16\sqrt{\frac{d}{a}}.$$



Скорость за два обхода: восемь одинаковых «треугольников», по одному на сторону

Обратите внимание. Нельзя ускорять тело на всём пути, рассчитывая «проскочить» вершины: ограничение a действует и на поворотах. Именно остановки в вершинах делают ответ в 8 раз больше времени одной стороны, а не в $\sqrt{8}$ раз, как было бы для разгона по прямой длиной $8d$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{d/a} = \sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$. Площадь треугольника на стороне: $\frac{1}{2} \cdot 2t_0 \cdot at_0 = at_0^2 = d$ — путь равен стороне. Второй способ для одной стороны: «разгон — торможение» через максимальную скорость v_m: путь $2 \cdot \frac{v_m^2}{2a} = d$, $v_m = \sqrt{ad}$, время $2v_m/a = 2\sqrt{d/a}$ — то же. Увеличение a уменьшает время, как и должно быть.

Смысл: при ограниченном ускорении углы траектории «стоят» остановки, поэтому весь путь распадается на одинаковые участки «разгон до середины стороны — торможение до вершины».

Ответ. $t = 16\sqrt{\frac{d}{a}}$.