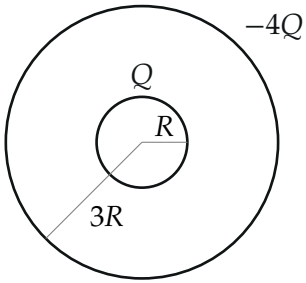
Две концентрические сферы

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 2] «Две концентрические сферы».

Две концентрические металлические сферы радиусами R и $3R$ заряжены зарядами Q и $-4Q$ соответственно. Затем малую сферу заземляют с помощью проводника ничтожно малой ёмкости через малое отверстие в большой сфере. Какой заряд протечёт по проводнику в направлении от малой сферы к земле?



Поясняющий рисунок: сферы и их заряды до заземления

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на заземление проводника. Заземлить — значит соединить с телом, потенциал которого принят за ноль (Земля очень далеко и очень велика). Заряд по проводу течёт, пока потенциал малой сферы не станет равным нулю. Большая сфера изолирована, её заряд $-4Q$ не меняется. Неизвестное одно — новый заряд малой сферы q, условие одно — $\varphi_R = 0$.

Обозначения. q — заряд малой сферы после заземления; φ_R — её потенциал; $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; Δq — заряд, протёкший от малой сферы к земле.

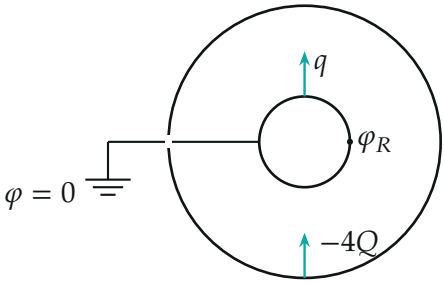
1. Потенциал равномерно заряженной сферы. Сфера радиуса r_0 с зарядом q_0 создаёт потенциал

$$\varphi = \frac{kq_0}{r} \ (r \geq r_0), \qquad \varphi = \frac{kq_0}{r_0} \ (r \leq r_0):$$

снаружи — как точечный заряд в центре, внутри поля нет, и потенциал всюду равен потенциалу на поверхности.

2. Потенциал малой сферы. По принципу суперпозиции складываем потенциалы двух сфер в точке на малой сфере. Для своей сферы эта точка на поверхности, $r = R$; для большой — внутри, поэтому её вклад равен потенциалу на её поверхности $r = 3R$:

$$\varphi_R = \frac{kq}{R} + \frac{k(-4Q)}{3R}.$$



Малая сфера соединена с землёй проводом через отверстие в большой сфере; её потенциал становится равным нулю. Бирюзовые стрелки — направление поля каждой сферы между ними

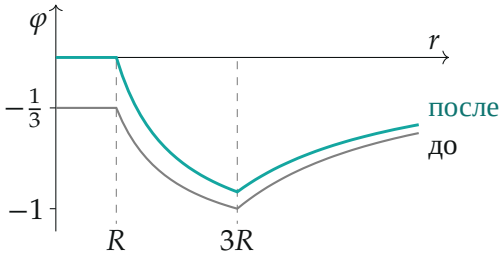
3. Условие заземления. $\varphi_R = 0$:

$$\frac{kq}{R} - \frac{4kQ}{3R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{4}{3}Q.$$

4. Сколько протекло. По закону сохранения заряда заряд малой сферы изменился только за счёт провода. От сферы к земле ушло

$$\Delta q = Q - q = Q - \frac{4}{3}Q = -\frac{Q}{3}.$$

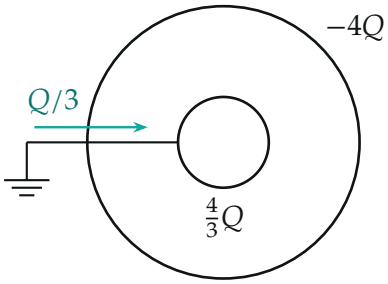
Знак минус: на самом деле заряд $Q/3$ протёк *с земли на малую сферу*. Отрицательная большая сфера держит потенциал внутри себя ниже нуля, и заземлённая малая сфера «подтягивает» с земли положительный заряд.



Потенциал $\varphi(r)$ в единицах kQ/R (расчёт по формулам пунктов 1–2): до заземления (серый) малая сфера имела потенциал $-\frac{1}{3}\,kQ/R$, после (бирюзовый) — ноль

Обратите внимание. Заземление не делает заряд малой сферы нулевым: ноль — её *потенциал*. Он складывается из вклада своего заряда и вклада большой сферы, а большая сфера внутри себя создаёт постоянный потенциал $-\frac{4}{3}kQ/R$, который и надо скомпенсировать.

Проверка. Второй способ — через изменение потенциала. До заземления $\varphi_R = \dfrac{kQ}{R} - \dfrac{4kQ}{3R} = -\dfrac{kQ}{3R}$. Чтобы поднять его до нуля, малой сфере надо добавить заряд δq с $\dfrac{k\,\delta q}{R} = \dfrac{kQ}{3R}$, то есть $\delta q = +\frac{1}{3}Q$ пришло с земли — то же. Предел: при заряде большой сферы Q_2 условие $\varphi_R = 0$ даёт $q = -Q_2\dfrac{R}{3R}$; если большая сфера не заряжена ($Q_2 = 0$), то $q = 0$ — весь заряд Q уходит в землю, как у одиночной заземлённой сферы.



После заземления: заряд $Q/3$ пришёл с земли, на малой сфере $\frac{4}{3}Q$

Смысл: «от малой сферы к земле» протекает отрицательный заряд $-Q/3$ — положительный заряд течёт в обратную сторону.

Ответ. $\Delta q = -\dfrac{Q}{3}$: заряд $Q/3$ перетекает с земли на малую сферу.