Десять поршней в сосуде

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 3] «Десять поршней в сосуде».

На столе стоит открытый сверху цилиндрический сосуд высотой h. В сосуд опускают поршень массой m, создающий избыточное давление, равное атмосферному (т.е. $mg = p_0 S$, p_0 — атмосферное давление, S — площадь сосуда). После того как поршень остановится, а температура воздуха под ним сравняется с окружающей температурой, в сосуд опускают второй поршень, затем третий и т.д. Найти расстояние между вторым и третьим поршнем после того, как в сосуд опустили десять поршней. Поршни закрывают сосуд герметично.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на изотермические процессы в нескольких порциях газа. Каждый новый поршень, входя в сосуд сверху, запирает под собой столб воздуха при атмосферном давлении p_0 — от себя до предыдущего поршня. Дальше количество воздуха в этой порции не меняется, а температура после остановки поршней возвращается к комнатной. Значит, для каждой порции верен закон Бойля–Мариотта: $pV = \text{const}$, то есть $p\,x = \text{const}$ для высоты столба x. Давление в порции определяется числом поршней над ней.

Обозначения. Поршни нумеруем по порядку опускания: первый — самый нижний. x_1 — высота воздуха под первым поршнем, x_{12} — между первым и вторым, x_{23} — между вторым и третьим. Толщину поршней не учитываем.

1. Давление в порции. Условие равновесия поршня k (второй закон Ньютона, ускорение ноль): снизу давит газ, сверху — газ над ним, плюс сила тяжести $mg = p_0 S$. Поэтому давление под поршнем на p_0 больше, чем над ним. Над верхним поршнем p_0, и если над порцией стоят N поршней, давление в ней

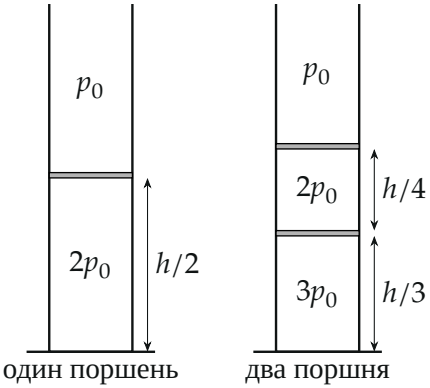
$$p = p_0 + Np_0 = (N+1)p_0.$$

2. Первый и второй поршни. Первый поршень запирает весь сосуд, столб h при p_0. Над ним один поршень — давление $2p_0$, закон Бойля–

Мариотта: $p_0 h = 2p_0 x_1$, $x_1 = \frac{h}{2}$.

Второй поршень запирает столб $h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}$ при p_0. Теперь над ним один поршень, давление $2p_0$, высота $x_{12} = \frac{h}{4}$. Под первым поршнем стало два поршня сверху, давление $3p_0$:

$$x_1 = \frac{p_0 h}{3p_0} = \frac{h}{3}.$$

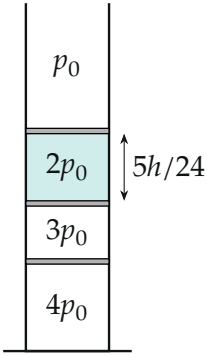


Порции воздуха после первого и после второго поршня (высоты в масштабе). Давление в порции на p_0 больше, чем над ней

3. Третий поршень. В момент опускания третьего поршня под ним столб воздуха над вторым поршнем:

$$h - x_1 - x_{12} = h - \frac{h}{3} - \frac{h}{4} = \frac{5h}{12}$$

при давлении p_0. Именно этот воздух окажется между вторым и третьим поршнями и дальше количество его не меняется. Сразу после остановки третьего поршня (над ним один поршень) давление в порции $2p_0$ и высота $\frac{5h}{24}$.



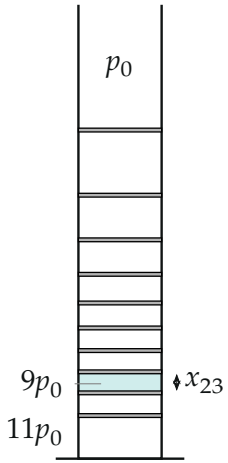
Три поршня: порция между вторым и третьим поршнями (бирюзовая) содержит воздух столба $\frac{5h}{12}$ при p_0

4. После десяти поршней. Над третьим поршнем стоят ещё семь (с четвёртого по десятый), над порцией 2–3 — восемь поршней: третий и семь выше. Давление в порции

$$p_{23} = (8+1)p_0 = 9p_0.$$

Закон Бойля–Мариотта для этой порции (от момента запирания до конца):

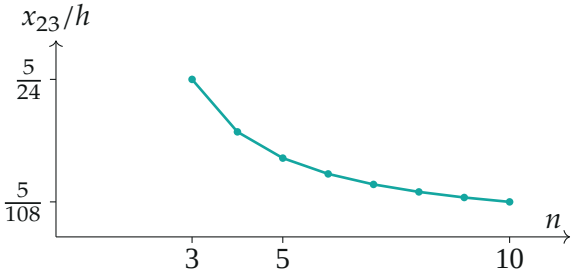
$$p_0 \cdot \frac{5h}{12} = 9p_0 \cdot x_{23} \quad \Longrightarrow \quad x_{23} = \frac{5h}{108}.$$



Десять поршней, все высоты в масштабе (расчёт для всех порций на python); порция 2–3 выделена

Обратите внимание. Порция между вторым и третьим поршнями запирается *третьим* поршнем, а не вторым: её количество задаётся высотой свободного столба в момент опускания третьего поршня, $\frac{5h}{12}$. Дальнейшие сжатия нижних порций на неё уже не влияют — влияет только число поршней сверху.

Проверка. Пошаговый расчёт на python для всех десяти поршней даёт высоты порций (снизу вверх, в долях h) 0,091, 0,050, 0,0463, 0,0469, …; третья из них $0{,}046296 = 5/108$. Суммарная высота столба $0{,}72h < h$ — все поршни помещаются в сосуд. Второй способ для порции 2–3: давление растёт ступенями $2p_0 \to 3p_0 \to \ldots \to 9p_0$, и высота убывает как $\frac{5h}{24} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5h}{108}$ — то же. Размерность: длина.



Высота порции 2–3 после опускания n-го поршня: $x_{23} = \frac{5h}{12(n-1)}$ при $n \geq 3$ (точки — расчёт)

Смысл: каждый поршень добавляет над порцией давление p_0, поэтому её высота убывает обратно пропорционально числу поршней над ней.

Ответ. $x_{23} = \dfrac{5h}{108}$.