Колеблющаяся наклонная плоскость

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 4] «Колеблющаяся наклонная плоскость».

Тело аккуратно положили на длинную наклонную плоскость с углом наклона к горизонту α. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ ($\mu > \operatorname{tg}\alpha$). Затем плоскость стали двигать так, что она с большой частотой меняет свою скорость $\vec{v}$ на противоположную $-\vec{v}$ (см. рисунок). Найти установившуюся скорость движения тела.

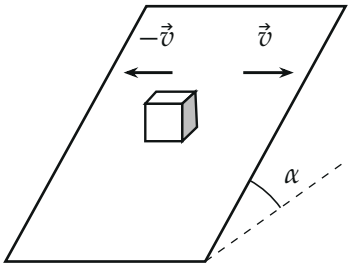


Рисунок условия: плоскость, наклонённая под углом α, быстро колеблется вдоль горизонтальной стороны со скоростью $\pm\vec{v}$

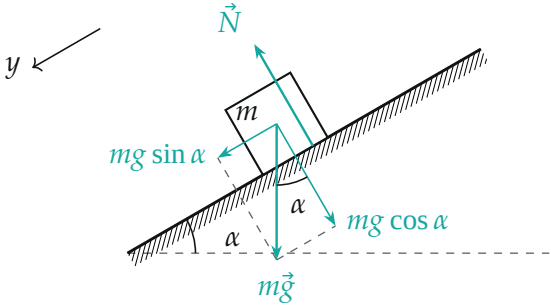
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на трение скольжения по движущейся поверхности. Главное: сила трения направлена против скорости тела *относительно плоскости*, а не относительно земли. Плоскость быстро колеблется поперёк склона, а тело едет вниз, поэтому относительно плоскости оно скользит под углом к линии спуска, и сила трения направлена под тем же углом, но вверх. Её составляющая вдоль склона удерживает тело, поперечная меняет знак каждые полпериода и в среднем даёт ноль. Установившаяся скорость — та, при которой вдоль склона трение уравновешивает силу тяжести.

Обозначения. Ось y — вдоль линии наибыстрейшего спуска (вниз по склону), ось x — вдоль горизонтальной стороны плоскости, вдоль которой она колеблется, ось z — перпендикулярно плоскости. v_0 — установившаяся скорость тела (вниз по склону), v — модуль скорости плоскости, $\vec{u}$ — скорость тела относительно плоскости, β — угол между $\vec{u}$ и осью y.

1. Нормальная сила и сила трения. Плоскость движется вдоль себя, и тело не отрывается от неё и не вжимается в неё, поэтому его ускорение вдоль оси z равно нулю: сумма проекций сил на ось z равна нулю. Эта ось выбрана перпендикулярно плоскости, чтобы сила трения в уравнение не вошла.

$$N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha.$$

Тело всё время скользит по плоскости (в следующем пункте будет видно, что $|\vec{u}| \geqslant v > 0$), поэтому сила трения — трение скольжения, её модуль $F = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ не зависит от направления скольжения. Меняется только направление силы.



Тело на плоскости (вид сбоку): сила тяжести и её составляющие, нормальная сила; ось y направлена вниз по склону

2. Скорость тела относительно плоскости. Частота колебаний большая, поэтому за один период скорость тела почти не успевает измениться. В установившемся режиме будем считать, что тело движется со скоростью $\vec{v}_0$, направленной вниз по склону: поперёк склона оно в среднем не сдвигается (это проверим в пункте 3). Скорость тела относительно плоскости

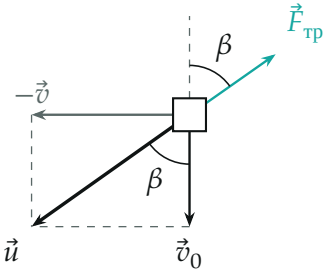
$$\vec{u} = \vec{v}_0 - \vec{v}_{\text{пл}}, \qquad \vec{v}_{\text{пл}} = \pm\vec{v}.$$

Вектор $\vec{u}$ имеет составляющую v_0 вниз по склону и составляющую v поперёк, направленную против движения плоскости. В одну половину

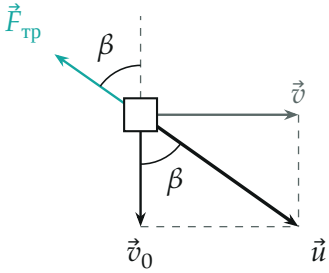
периода она направлена влево, в другую — вправо:

$$|\vec{u}| = \sqrt{v_0^2 + v^2}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{v}{v_0}.$$

Так как $v > 0$, относительная скорость нигде не обращается в ноль, и скольжение действительно идёт всё время.



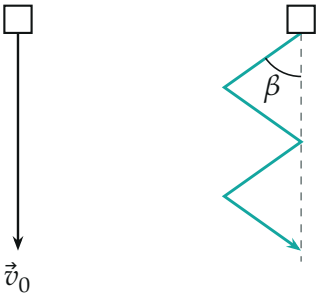
плоскость движется вправо, $\vec{v}_{пл} = \vec{v}$



плоскость движется влево, $\vec{v}_{пл} = -\vec{v}$

Скорость $\vec{u}$ относительно плоскости и сила трения

В системе земли тело едет прямо вниз, а в системе плоскости — зигзагом: в одну половину периода под углом β влево от направления спуска, в другую — вправо.



относительно земли

относительно плоскости

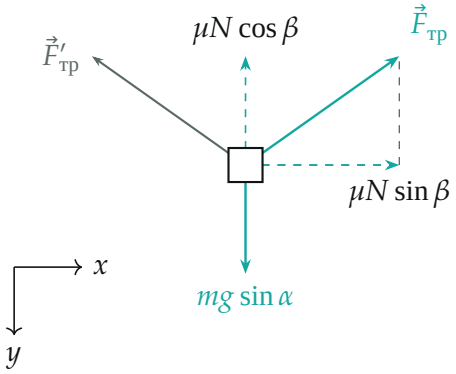
Путь тела: относительно земли — прямая, относительно плоскости — зигзаг (масштаб увеличен)

3. Направление и составляющие силы трения. Сила трения скольжения направлена против скорости тела относительно плоскости: $\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N\,\vec{u}/|\vec{u}|$. Вектор $\vec{F}_{\text{тр}}$ составляет угол β с направлением вверх по склону (он противоположен $\vec{u}$, а $\vec{u}$ составляет угол β с направлением вниз). Её проекции:

$F_y = \mu N \cos\beta$ (вверх по склону, в обе половины периода одинаково),

$F_x = \pm\,\mu N \sin\beta$ (поперёк склона, знак меняется).

Поперечная составляющая в течение половины периода тянет тело вправо, в течение другой половины — влево с той же силой, так что её среднее за период равно нулю: тело в среднем не уходит вбок, как мы и предполагали. Продольная составляющая постоянна и работает на торможение.



Составляющие силы трения: вдоль склона $\mu N \cos\beta$ вверх, поперёк $\pm\mu N \sin\beta$; серым — сила другой половины периода

4. Условие установившейся скорости. Скорость v_0 установилась, значит, средняя сила вдоль склона равна нулю. Вдоль оси y на тело действуют составляющая силы тяжести $mg \sin\alpha$ вниз и F_y вверх. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y (вдоль неё лежит ускорение) при нулевом ускорении:

$$mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha\, \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}.$$

Решение есть, потому что $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ и значит $\cos\beta < 1$. Угол β определяется только свойствами склона и трения, скорость плоскости на него не влияет.

5. Установившаяся скорость. Из $\operatorname{tg}\beta = v/v_0$ получаем $v_0 = v/\operatorname{tg}\beta = v\cos\beta/\sin\beta$. Найдём синус:

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}}{\mu},$$

тогда

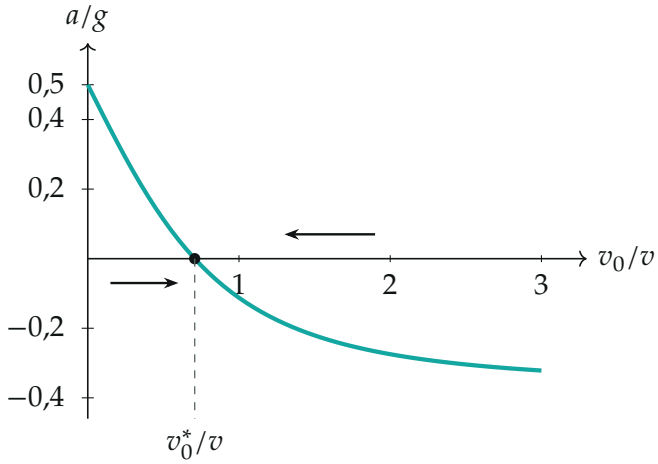
$$v_0 = v\,\frac{\operatorname{tg}\alpha/\mu}{\sqrt{\mu^2-\operatorname{tg}^2\alpha}/\mu} = \frac{v\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\mu^2-\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Тело движется вниз по склону с этой скоростью, постоянной в среднем.

Почему скорость именно такая. Покажем, что режим устойчив. Продольная составляющая трения зависит от v_0: $F_y = \mu N\cos\beta$, где $\cos\beta = v_0/\sqrt{v_0^2+v^2}$, и растёт с v_0. Ускорение тела вдоль склона

$$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha\,\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+v^2}}.$$

При $v_0 = 0$ трение направлено только поперёк, и тело разгоняется вниз с $g\sin\alpha$. С ростом v_0 трение растёт, и при $v_0 \to \infty$ оно стремится к $\mu mg\cos\alpha > mg\sin\alpha$ — тело тормозит. Значит, ускорение меняет знак ровно в одной точке, и скорость стремится к ней с обеих сторон.



Ускорение тела вдоль склона в зависимости от скорости ($\mu = 1$, $\alpha = 30°$): при $v_0 < v_0^*$ тело разгоняется, при $v_0 > v_0^*$ тормозит

Обратите внимание на два места. Первое: сила трения зависит от скорости тела относительно плоскости, поэтому вся картина строится в системе отсчёта плоскости; в системе земли про направление трения ничего сказать нельзя. Второе: сила трения всё время сохраняет модуль μN, меняется её направление, а не величина — скольжение не прекращается ни на миг, и v_0 не стремится к скорости плоскости.

Проверка. Размерность: $\operatorname{tg}\alpha$ и μ безразмерны, поэтому v_0 измеряется в тех же единицах, что и v. Предельные случаи. Плоскость не колеблется ($v \to 0$): $v_0 \to 0$, тело остаётся на месте, так как $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Трение очень велико ($\mu \to \infty$): $v_0 \to 0$ — тело почти не сползает. Трение почти критическое ($\mu \to \operatorname{tg}\alpha$): $v_0 \to \infty$, тело перестаёт удерживаться, как и должно быть при $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

Второй способ — численный расчёт на python: уравнения движения тела по плоскости, которая каждые полпериода меняет скорость $\pm v$ (период 2 мс, $v = 1$ м/с, $\mu = 1$, $\alpha = 30°$) дали $v_0 = 0{,}7071\,v$, формула $\operatorname{tg}\alpha / \sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 0{,}7071$. Для $\mu = 0{,}8$, $\alpha = 20°$ и для $\mu = 2$, $\alpha = 45°$ также совпало до четвёртого знака.

Ответ. $v_0 = v \operatorname{tg}\alpha \,/ \sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ (направлена вниз по склону; относительно плоскости тело скользит под углом β, $\cos\beta = \operatorname{tg}\alpha / \mu$).