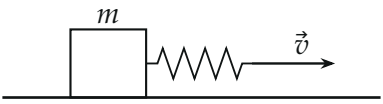
Тело на пружине, конец тянут

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 1] «Тело на пружине, конец тянут».

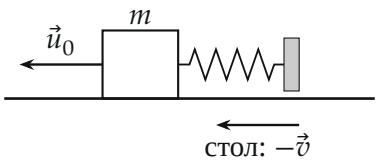
К телу массой m, лежащему на гладком горизонтальном столе, прикреплена легкая пружина с жесткостью k. Второй конец пружины начинают двигать с постоянной скоростью v. Найти максимальную кинетическую энергию тела в процессе движения. Через какое минимальное время после начала движения кинетическая энергия тела будет максимальной?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на гармонические колебания и переход в движущуюся систему отсчёта. Сначала пружина не деформирована и тело покоится, а её конец уже едет со скоростью v. Пружина растягивается, тянет тело, тело разгоняется, обгоняет конец, пружина сжимается и тормозит его — и так далее. Удобнее всего смотреть из системы отсчёта, связанной с концом пружины: она движется равномерно, значит, инерциальная, и в ней конец неподвижен — это обычный пружинный маятник. Трения нет, поэтому колебания незатухающие.

Обозначения. $\omega = \sqrt{k/m}$ — циклическая частота, $T = 2\pi/\omega$ — период; $\vec{u}$ — скорость тела в системе конца пружины, $\vec{V}$ — в системе стола; ось x — по направлению $\vec{v}$.

1. Переход в систему конца пружины. Скорости складываются по закону сложения скоростей $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$. В начальный момент тело покоится относительно стола, $\vec{V} = 0$, значит, в новой системе его скорость $\vec{u}_0 = -\vec{v}$: тело «толкнули» от конца пружины со скоростью v, а пружина в этот момент не деформирована — тело в положении равновесия.



В системе конца пружины: конец неподвижен, пружина в начальный момент не деформирована, тело движется от конца со скоростью $u_0 = v$

2. Колебания в этой системе. Второй закон Ньютона для тела в проекции на ось x: $m\ddot{x}' = -kx'$, где x' — смещение тела от положения равновесия в системе конца. Это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$. Тело стартует из положения равновесия со скоростью $-v$, поэтому амплитуда скорости равна v:

$$u_x(t) = -v\cos\omega t.$$

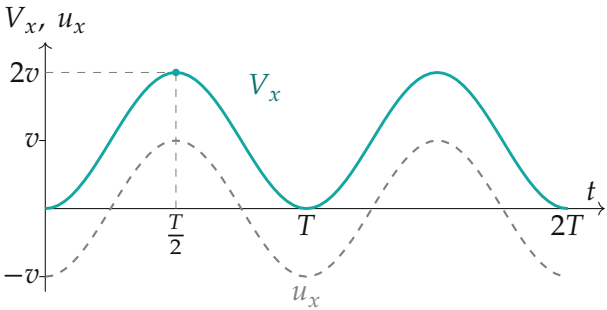
Каждые полпериода скорость меняет направление: при $t = T/2$ тело снова проходит положение равновесия, теперь со скоростью $+v$, к концу пружины и дальше.

3. Скорость относительно стола. Возвращаемся в систему стола:

$$V_x(t) = u_x(t) + v = v\,(1 - \cos\omega t).$$

Она меняется от 0 до $2v$, ни разу не становясь отрицательной: тело всё время едет вперёд, «толчками». Наибольшая скорость $2v$ достигается при $\cos\omega t = -1$, впервые при $\omega t = \pi$:

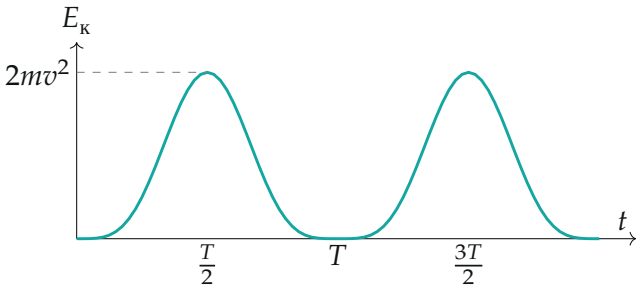
$$t_{\min} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$



Скорость тела: в системе конца пружины $u_x = -v\cos\omega t$ (серый пунктир), в системе стола $V_x = v(1 - \cos\omega t)$ (бирюзовая) — график по формулам

4. Максимальная кинетическая энергия.

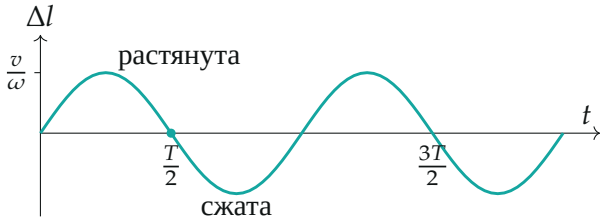
$$E_к = \frac{mV^2}{2} = \frac{mv^2}{2}(1-\cos\omega t)^2, \qquad E_{к,\max} = \frac{m(2v)^2}{2} = 2mv^2.$$



Кинетическая энергия тела в системе стола: максимум $2mv^2$ впервые через $T/2$, затем через каждый период

Обратите внимание. Кинетическая энергия зависит от системы отсчёта: в системе конца пружины наибольшая энергия $mv^2/2$, а в системе стола — в 4 раза больше. Переход в другую систему делается для скоростей, а энергию считаем уже в нужной системе.

Проверка. Второй способ — прямо в системе стола. Удлинение пружины $vt - x$, второй закон Ньютона $m\ddot{x} = k(vt - x)$, решение с $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$: $x = vt - \frac{v}{\omega}\sin\omega t$, откуда $\dot{x} = v(1-\cos\omega t)$ — то же. Физический смысл момента $T/2$: удлинение $vt - x = \frac{v}{\omega}\sin\omega t = 0$ — пружина не деформирована, сила на тело равна нулю, ускорение ноль, скорость экстремальна. Размерность: $\sqrt{m/k} = \sqrt{\text{кг}/(\text{Н}/\text{м})} = \text{с}$.



Удлинение пружины $\Delta l = vt - x = \frac{v}{\omega}\sin\omega t$ (по формуле): первые полпериода пружина растянута и разгоняет тело, в момент $T/2$ она не деформирована — скорость тела наибольшая, дальше сжатая пружина тормозит

Смысл: тело движется «в среднем» со скоростью конца пружины v и колеблется вокруг неё с амплитудой скорости v, поэтому его скорость пробегает от 0 до $2v$.

Ответ. $E_{\text{к,max}} = 2mv^2$; $t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.